

7625

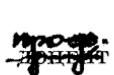
В. С. НУВАРЬЕВ

# НОВЫЙ МЕТОД УРАВНИВАНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИЙ

МОСКВА

ОГИЗ  
1932

ИРКУТСК

 В. С. НУВАРЬЕВ  
Доктор СИБИРСКОГО ГОРНОГО ИНСТИТУТА

НОВЫЙ МЕТОД  
УРАВНИВАНИЯ  
ТРИАНГУЛЯЦИЙ

---

МОСКВА



ИРКУТСК

1932

## ПРЕДИСЛОВИЕ.

В 1931 г. мною была опубликована работа „Метод полигонального уравнивания тригонометрических вялов“, в которой, кроме оригинального решения полигонных уравнений под условием minimum'a суммы квадратов поправок к углам треугольников (способ первый), была выдвинута идея и даны формулы (способ второй) уравнивания триангуляций под условием minimum'a деформации треугольников, т. е. когда уравнивание осуществляется не только под условием minimum'a суммы квадратов поправок к углам, но и ко всем сторонам.

В настоящем труде мною полностью приведено теоретическое обоснование обоих способов, а также установлена аналогия между результатами, получающимися по способам при обработке триангуляции, состоящей из равносторонних треугольников. Кроме того в п. п. 11—17 даны формулы применения метода к уравниванию триангуляций за другие, часто встречающиеся в практике, условия. В частности, в п. 12 мною даны оригинальные формулы уравнивания наблюденных углов треугольников (не прибегая к составлению условий фигур), практически впервые разрешающих сложную задачу уравнивания наблюденных углов триангуляции за полигонные условия (п. 17).

Уравнивание триангуляций всегда представляло собою дело значительной трудности и потому не могло быть достоянием широких кругов специалистов, что несомненно сказывалось на качестве триангуляции. Кроме того, уравнивание под условием minimum'a суммы квадратов поправок к углам не всегда обеспечивает правильное и целесообразное решение, так как может привести к значительной деформации треугольников.

Поэтому я считаю, что применение моего метода уравнивания, отличающегося крайней несложностью составления условных и нормальных уравнений при значительной экономии во времени, потребном на уравнивание, даст недостающие в существующих методах—строгость решения и его простоту, что послужит созданию прочной геодезической основы в Союзе. Я надеюсь, что включение в настоящий труд детально разработанных примеров уравнивания даст возможность практическим работникам в области геодезии легко применить метод при обработке триангуляций, для студентов же специальных вузов этот труд послужит наглядным пособием при прохождении ими курса геодезии.

*B. Нуварьев.*

Иркутск,  
февраль 1932 г.

## В В Е Д Е Н И Е.

Полевые данные, полученные при наблюдениях на триангуляциях, вообще говоря, всегда содержат погрешности наблюдений, которые зависят от наблюдателя, качества инструмента, условий видимости и пр. Применением лучшего вида инструментов и хорошо продуманной программой наблюдений качество полевого материала значительно повышается, но все же остаточные погрешности часто весьма ощутительны. Следствием этого, при примыкании рядов триангуляций друг к другу, когда они образуют замкнутый полигон, или когда ряд опирается обоими концами на стороны и пункты, полученные непосредственным измерением или принадлежащие другим триангуляциям, всегда получаются разногласия между координатами пунктов, азимутами и длинами конечных сторон, т. е. возникают так называемые полигонные условия.

Измеренная сумма углов в треугольнике должна равняться  $180 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  есть сферический избыток; однако, сумма наблюденных углов, как общее правило, отличается от  $180 + \varepsilon$  на некоторую величину, определяющую суммарную погрешность в углах треугольников.

При вычислении так называемой центральной системы, т. е. системы, в которой тригонометрические пункты располагаются вокруг одной центральной точки, являющейся общей вершиной всех треугольников, сумма углов при центральной вершине обычно отличается от  $360^\circ$ , откуда возникает так называемое условие горизонта. Равным образом, при решении сторон такой системы, пройдя через все треугольники, мы не получим значения исходной стороны, откуда возникает необходимость уравнивания за боковое условие. Система треугольников, состоящая из двух пересекающихся диагоналей, также ведет к необходимости уравнивания.

Одновременно с удовлетворением условий, возникающих в той или иной системе треугольников, имеются еще так называемые условия фигур, которые накладываются для того, чтобы, например, приведенные к  $180^\circ$  углы поправками к ним не расстраивались, или чтобы сумма поправок к углам той или иной фигуры равнялась сумме погрешностей в углах этой фигуры с обратным знаком.

Уравнивание триангуляций под теми или иными условиями применялось издавна, но только лишь со временем Лежандра и Гаусса, применявших при уравнивании способ наименьших квадратов, уравнивание привело строгую форму, исключающую произвольные допущения.

В результате решения возникающих в триангуляциях условий с применением способа наименьших квадратов мы имеем вероятнейшие поправки к углам или направлениям, которые, являясь наилучшими при данных погрешностях в триангуляции, удовлетворяют возникшим в триангуляции условиям.

Однако, благодаря сложности вычислительных действий, практически часто возникает необходимость уравнивания тригонометрической сети по частям, расчленяя все количество условных уравнений на группы.

Одним из сложнейших видов уравнивания является уравнивание так называемые полигонные условия. Впервые этот вопрос был разрешен прусским геодезистом Прондзинским в 1868 г.

Способ, разработанный Прондзинским, заключался в том, что представленные в линейном виде уравнения, дающие связь между поправками к углам с обнаруженными при примыкании триангуляции погрешностями (свободные члены уравнений), решались под условием минимума суммы квадратов поправок к углам всех треугольников ряда. Впервые способ Прондзинского широкое применение получил на геодезических работах в Британской Индии под начальством Уокера, которым были произведены сложнейшие вычисления по уравниванию.

Все триангуляции были разделены на 5 больших частей, из которых каждая уравнивалась отдельно. Чтобы получить представление о количестве вычислительного труда по уравниванию даже такой расчлененной триангуляции, достаточно упомянуть, что один из этих полигонов, именно северо-западный, состоящий из 128 треугольников и 110 многоугольников, имел всего 2418 наблюденных углов. Эти фигуры доставили 955 условных уравнений, не считая условий смыкания полигонов. Так как совместное решение всех уравнений было практически неосуществимо, то и здесь был допущен ряд упрощений и выключка систем, отягчающих уравнительные действия.

Применявшийся при уравнивании способ Прондзинского, получивший отсюда название Британского, у нас в 1892 г. был введен профессором В. В. Витковским. Сложность работы по составлению в этом способе третьего и четвертого (широтного и долготного) уравнений весьма ограничивала круг его применения, так что он долго применялся исключительно на триангуляциях I класса.

В 1901 г. французским академиком Хаттом был опубликован упрощенный метод полигонального уравнивания, применявшийся им на триангуляциях на острове Корсике. Хотя этот метод и давал экономию во времени, однако, он не являлся идеальным. В последнее время вопрос уравнивания обогатился несколькими методами, как строгого уравнивания, так и упрощенного. Наибольшее распространение получил американский способ, усовершенствованный геодезистом Н. А. Урмаевым (Труды Государственного института геодезии и картографии, выпуск I 1931 г.).

Мы не имеем в виду давать здесь сколько нибудь подробного перечня и анализа всех имеющихся методов уравнивания, так как это не входит в наши задачи; отметим лишь, что применение новых методов значительно упростило вычислительные действия при уравнивании и тем самым расширило практику его.

В 1931 г. был опубликован новый метод полигонального уравнения<sup>1</sup>, который, как частность, дает поправки, идентичные Британскому методу и в то же время выдвигает идею минимума деформации треугольников ряда.

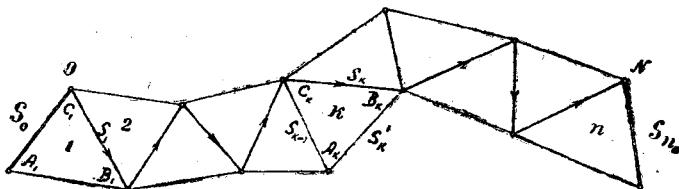
При известной простоте этот метод легко применим к другим встречающимся в геодезии системам триангуляции. Изложение теории этого метода, развитие теории минимума деформации ряда, а также применение нового метода уравнивания к другим встречающимся в геодезической практике системам триангуляций и составляет предмет дальнейшего изложения.

## 1. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА; СПОСОБ ПЕРВЫЙ.

Для лучшего уяснения нового метода уравнивания мы позволим себе привести изложение его несколько не в обычном порядке, т. е. рассмотрим вначале уравнивание за полигонные условия.

Исходным моментом метода является то, что всякое уравнивание за-  
те или иные условия влечет за собою изменения длин сторон триангу-  
ляций и их азимутов.

Обозначим исходную сторону треугольника с номером К через  $S_{k-1}$ , сторону продолжения через  $S_k$  и промежуточную — через  $S'$ :



Фиг. 1.

углы же—против исходной стороны через В, против стороны продолжения через А и против промежуточной стороны через С (фиг. 1).

Положим, что уравнивание триангуляции произошло, причем связующие стороны триангуляции  $S_k$  получили масштабные поправки  $m_k$  и азимутальные  $\Gamma_k$ , т. е.

$S_1 \ S_2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ S_n$

$m_1 \ m_2 \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ m_n$

$$r_1 \ r_2 \ \dots \ \dots \ \dots \ r_n.$$

<sup>1</sup> Нуварьев В. С. Метод полигонального уравнивания тригонометрических рядов. Иркутск, ОГИЗ, 1931 г.

а промежуточные стороны

$$\begin{array}{ccccccccc} S'_1 & S'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S'_n \\ m'_1 & m'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m'_n \\ r'_1 & r'_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & r'_n \end{array}$$

Тогда линейное изменение стороны

$$\left. \begin{array}{l} dS_k = m_k S_k \\ dS'_k = m'_k S'_k \end{array} \right\} \quad (1)$$

где  $m_k$  есть некоторая правильная дробь.

Положим, что

$$\left. \begin{array}{l} m_k - m_{k-1} = \mu_k \\ m'_k - m'_{k-1} = \mu'_k \end{array} \right| \quad \left. \begin{array}{l} r_k - r_{k-1} = \rho_k \\ r'_k - r'_{k-1} = \rho'_k \end{array} \right\} \quad (2)$$

где  $\mu$  назовем масштабным изменением и  $\rho$  азимутальным изменением, т. е. масштабная поправка  $m_k$  стороны продолжения  $S_k$  складывается из масштабной поправки исходной стороны  $m_{k-1}$  и масштабного изменения  $\mu_k$ ; аналогично азимутальная поправка  $r_k$  связующей стороны  $S_k$  складывается из азимутальной поправки  $r_{k-1}$  исходной стороны и  $\rho_k$ . Совершенно понятно, что при

$$m_k = m_{k-1} \text{ и } r_k = r_{k-1},$$

т. е. когда  $\mu_k = 0$  и  $\rho_k = 0$

форма треугольника с номером К не изменится. Найдем зависимость между изменениями  $\mu_k$ ,  $\rho_k$  стороны продолжения с другими элементами треугольника, для чего воспользуемся формулой

$$S_k = S_{k-1} \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Дифференцируя  $S_k$  по переменным А и В имеем:

$$dS = \mu_k S_k = S_{k-1} \left( \frac{\cos A}{\sin B} dA - \sin A \frac{\cos B}{\sin^2 B} dB \right)$$

или разделяя обе части уравнения на  $S_k$  и заменяя отношение сторон отношением синусов углов, имеем:

$$\mu = \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} B dB.$$

При всяких поправках к углам треугольников необходимо соблюдение условия

$$dA + dB + dC = 0.$$

Решим уравнения относительно  $dA$ , для чего предварительно уравняем коэффициенты при  $dB$  и сложим оба уравнения

$$(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) dA + \operatorname{ctg} B dC - \mu = 0,$$

откуда

$$dA = \frac{\mu - \operatorname{ctg} B dC}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \quad (a)$$

Решая те же два уравнения относительно  $dB$ , имеем:

$$(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) dB + \operatorname{ctg} A dC + \mu = 0$$

или

$$dB = -\frac{\mu + \operatorname{ctg} A dC}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \quad (b)$$

Для определения зависимости между масштабным изменением  $\mu_k$  промежуточной стороны с масштабным изменением  $\mu_k$  связующей стороны и изменением  $dC$  угла С возьмем формулу

$$S'_k = S_{k-1} \frac{\sin C}{\sin B}$$

Дифференцируя  $S'_k$  по переменным  $dC$  и  $dB$ , имеем:

$$dS'_k = \mu'_k S'_k = S_{k-1} \left( \frac{\cos C}{\sin B} dC - \sin C \frac{\cos B}{\sin^2 B} dB \right)$$

или, подставляя значение  $dB$  из уравнения (b), разделяя на  $S'_k$  заменяя отношение сторон отношением синусов углов, имеем:

$$\mu'_k = \operatorname{ctg} C dC + \operatorname{ctg} B \frac{\mu + \operatorname{ctg} A dC}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \quad (c)$$

Произведем преобразование выражений (a), (b) и (c), имея ввиду,

$$\text{что } \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B}.$$

По сокращении имеем:

$$dA_k = \frac{\sin A_k \sin B_k}{\sin C_k} \mu_k - \frac{\sin A_k \cos B_k}{\sin C_k} dC_k$$

$$dB_k = - \left( \frac{\sin A_k \sin B_k}{\sin C_k} \mu_k + \frac{\sin B_k \cos A_k}{\sin C_k} dC_k \right)$$

$$\mu' = \frac{\sin A_k \cos B_k}{\sin C_k} \mu_k + \frac{\sin A_k \sin B_k}{\sin C_k} d C_k$$

или, введя обозначения  $(A) = d A$ ,  $(B) = d B$ ,  $(C) = d C$

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin C} = f, \quad \frac{\sin A \cos B}{\sin C} = p, \quad \frac{\cos A \sin B}{\sin C} = p'$$

получим окончательно

$$(A) = f\mu - p(C)$$

$$(B) = -(f\mu + p'(C))$$

$$\mu' = p\mu + f(C)$$

(3)

Условимся положительными азимутальными поправками считать поправки по ходу часовой стрелки. Тогда из рассмотрения фиг. 2 следует, что для правого по ходу нумерации треугольника

$$r_k - r_{k-1} = +\rho = -(C)$$

$$\text{для левого } r_k - r_{k-1} = +\rho = +(C),$$

а потому, введя обозначения

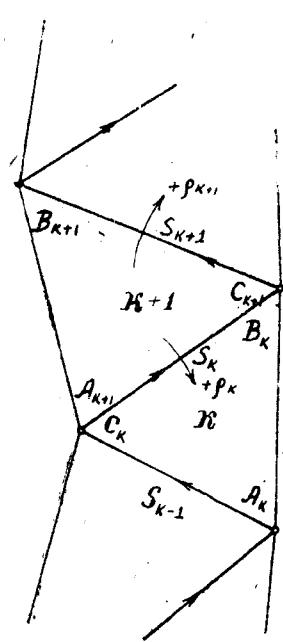
для правых треугольников

для левых треугольников

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin C} = f$$

$$\frac{\sin A \sin B}{\sin C} = f \quad (4)$$

и имея в виду формулы (3), напишем выражения для изменений углов  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  в функции изменений поправок масштабной  $\mu_k$  и азимутальной  $\rho_k$  связующей стороны треугольника  $S_k$  с номером  $K$



Фиг. 2.

	Правый	Левый
(A)	$p\rho + f\mu$	$-(p\rho + f\mu)$
(B)	$p'\rho - f\mu$	$-p'\rho + f\mu$
(C)	$-\rho$	$+\rho$

(5)

Легко доказать, что сумма дифференциальных изменений углов равна нулю. В самом деле, по суммированию имеем:

$$(A) + (B) + (C) = \pm (p + p' - 1)\rho.$$

Подставляя значение  $p$  и  $p'$  имеем:

$$\left( \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin C} - 1 \right) p = \left( \frac{\sin C}{\sin C} - 1 \right) p = 0,$$

откуда имеем:

$$p' = 1 - p \quad (6)$$

Таким образом нами установлена зависимость между дифференциальными изменениями углов треугольника с таковыми же изменениями  $\mu_k$  и  $\bar{\rho}_k$  связующей стороны  $S_k$ .

Произведем аналогичную замену в выражении для масштабного изменения промежуточной стороны  $\mu_k$  (формулы 3); получим:

$$\mu' = p \mu - f p \quad (7)$$

Для треугольников, лежащих влево по ходу нумерации, знак минус при  $f$  установлен исключительно для придания единообразия формулам (5) и (7), что оправдывается последующим.

## 2. СОСТАВЛЕНИЕ ПОЛИГОННЫХ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Как уже было сказано, вследствие неизбежных погрешностей при наблюдениях на триангуляции при образовании замкнутого полигона всегда обнаруживаются несогласия в конечных и исходных данных полигона для значения логарифма стороны, азимута ее и координат конечных пунктов. В рядах, прокладываемых между имеющимися уже сторонами триангуляций, эти расхождения увеличиваются или уменьшаются в зависимости от величины и знаков погрешностей в исходных и промычных сторонах и пунктах.

Допустим, что вычисляя тригонометрический ряд (Фиг. 1) от стороны  $S_0$  к стороне  $S_n$ , мы получили следующие расхождения;

$$\Delta \lg S = \lg S_n - \lg S_{n_0}$$

$$\Delta \alpha = \alpha_n - \alpha_{n_0}$$

$$v_3 = X_n - X_{n_0}$$

$$v_4 = Y_n - Y_{n_0}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_n - \varphi_{n_0}$$

$$\Delta \lambda = \lambda_n - \lambda_{n_0}$$

где  $X$  и  $Y$  суть координаты Гаусса-Крюгера пункта  $N$ , а  $\varphi$  и  $\lambda$  географические координаты.

Вопрос уравнивания, очевидно, сводится к отысканию к связующим сторонам таких поправок, чтобы левые части написанных равенств обрались в нули.

Но из первого равенства  $\Delta \lg S = \lg S_n - \lg S_n$  , яствует, что последняя сторона должна получить масштабную поправку

$$m_n = -\frac{\Delta \lg S}{10^7 M},$$

где  $\Delta \lg S$  выражено в седьмых знаках логарифма и  $M$ —модуль Бригговых логарифмов.

$$\text{Полагая } \frac{\Delta \lg S}{10^7 M} = v_1 \text{ имеем;}$$

$$m_n + v_1 = 0.$$

Аналогично, называя  $\Delta \alpha \sin 1''$  через  $v_2$  имеем:

$$r_n + v_2 = 0.$$

На основании формулы (2) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = \mu_1 \\ m_2 = m_1 + \mu_2 = \mu_1 + \mu_2 \\ \vdots \\ m_n = m_{n-1} + \mu_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \\ r_1 = \rho_1 \\ r_2 = r_1 + \rho_2 = \rho_1 + \rho_2 \\ \vdots \\ r_n = r_{n-1} + \rho_n = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n \end{array} \right\} \quad (8)$$

Или, подставляя вместо  $m_n$  и  $r_n$  соответствующие выражения, имеем первое и второе—базисное и азимутальное условные уравнения

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + v_1 = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n + v_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Для составления третьего и четвертого, т. е. координатных условных уравнений, возьмем формулы для приращений в прямоугольных координатах

$$\Delta x = S \cos \alpha; \quad \Delta y = S \sin \alpha.$$

Рассуждаем следующим образом. Связующие стороны  $S_1 S_2 \dots S_n$  получили масштабные и азимутальные поправки  $m_1 m_2 \dots m_n$  и  $r_1 r_2 \dots r_n$ , вследствие чего произошли изменения в приращениях  $\Delta x$  и  $\Delta y$ .

Вопрос уравнивания за координатные условия сводится к тому, чтобы сумма изменений приращений координат по ходовой линии, выбранной по связующим сторонам или, что все равно, чтобы изменение координат точки N было равно соответственно — v<sub>3</sub> и — v<sub>4</sub>.

Дифференцируем  $\Delta x$  и  $\Delta y$  по переменным S и  $\alpha$

$$d(\Delta x) = \cos\alpha \cdot dS - S \sin\alpha \cdot d\alpha$$

$$d(\Delta y) = \sin\alpha \cdot dS + S \cos\alpha \cdot d\alpha$$

или заменяя  $dS$  через  $mS$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} d(\Delta x)_k &= m_k \Delta x_k - r_k \Delta y_k \\ d(\Delta y)_k &= m_k \Delta y_k + r_k \Delta x_k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Производя суммирование дифференциальных изменений приращений координат по ходовой линии (фиг. 1) от точки 0 до точки N числом i, имеем:

$$\left. \begin{aligned} [d(\Delta x)]_i^i &= [(m \Delta x - r \Delta y)]_i^i + v_3 = 0 \\ [d(\Delta y)]_i^i &= [(m \Delta y + r \Delta x)]_i^i + v_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Подставляем в уравнения (a) значения  $m$  и  $r$  из (8), и производя суммирование, имеем третье и четвертое уравнения в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \mu_1 [\Delta x]_1^i + \mu_2 [\Delta x]_2^i + \dots + \mu_i [\Delta x]_i^i - \rho_1 [\Delta y]_1^i - \dots - \rho_i [\Delta y]_i^i + v_3 &= 0 \\ \mu_1 [\Delta y]_1^i + \mu_2 [\Delta y]_2^i + \dots + \mu_i [\Delta y]_i^i + \rho_1 [\Delta x]_1^i + \dots + \rho_i [\Delta x]_i^i + v_4 &= 0 \end{aligned}$$

или, обозначая коэффициенты при  $\mu$  и  $\rho$  в первом и втором уравнениях через  $a = +1$ , коэффициенты при  $\mu$  и  $\rho$  в третьем и четвертом уравнениях через

$$c_k = +[\Delta x]_k^i$$

$$d_k = +[\Delta y]_k^i$$

имеем условные уравнения в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \dots + a_n \mu_n + v_1 &= 0 \\ a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 + \dots + a_n \rho_n + v_2 &= 0 \\ c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_i \mu_i - d_1 \rho_1 - d_2 \rho_2 - \dots - d_i \rho_i + v_3 &= 0 \\ d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2 + \dots + d_i \mu_i + c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + \dots + c_i \rho_i + v_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

### 3. РЕШЕНИЕ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Выше мы нашли зависимость между дифференциальными изменениями углов  $dA$ ,  $dB$  и  $dC$  и масштабным и азимутальным изменениями стороны продолжения треугольника (формулы 5).

Полигонные требования выражены уравнениями (11).

Прибавим к уравнениям (11) условие минимума суммы квадратов поправок к углам, т. е.

$$[(A)^2 + (B)^2 + (C)^2] = \text{minimum}$$

или, подставляя значение  $dA$ ,  $dB$ , и  $dC$  из (5) и возводя в квадрат, имеем:

$$\begin{aligned} & f^2 \mu^2 + p^2 \rho^2 + 2fp \mu \rho \\ & f^2 \mu^2 + p'^2 \rho^2 - 2fp' \mu \rho \\ & + \rho^2 \\ \hline & [2f^2 \mu^2 + (p^2 + p'^2 + 1) \rho^2 + 2f(p - p') \mu \rho] = \text{minimum} \quad (a) \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение (a) по переменным  $\mu$  и  $\rho$ , разделяя все члены на два и приравнивая нулю, имеем:

$$\{2f^2 \mu d\mu + (p^2 + p'^2 + 1) \rho d\rho + f(p - p') \rho d\mu + f(p - p') \mu d\rho\} = 0 \quad (b)$$

Полагая в уравнении (b)

$$\left. \begin{aligned} 2f^2 &= F' \\ p^2 + p'^2 + 1 &= G' \\ f(p - p') &= H' \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

имеем:

$$[(F' \mu + H' \rho) d\mu + (G' \rho + H' \mu) d\rho] = 0 \quad (13)$$

Дифференцируя уравнения (11), помножая на неопределенные множители  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  и  $K_4$  и складывая, имеем:

$$[(aK_1 + cK_3 + dK_4) d\mu + (aK_2 - dK_3 + cK_4) d\rho] = 0 \quad (c)$$

Приравнивая по неопределенности множителей  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  коэффициенты при  $\mu$  и  $\rho$  в уравнениях (c) и (13) и полагая

$$\left. \begin{aligned} aK_1 + cK_3 + dK_4 &= I \\ aK_2 - dK_3 + cK_4 &= II \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

имеем:

$$F'\mu + H'\rho = I$$

$$G'\rho + H'\mu = II.$$

Уравняем коэффициенты при  $\rho$  в первом и втором уравнениях и вычтем из первого второе

$$(F' G' - H'^2) \mu = G' I - H' II.$$

$$\text{откуда } \mu = \frac{G'}{F' G' - H'^2} I - \frac{H'}{F' G' - H'^2} II.$$

Уравняв аналогично коэффициенты при  $\mu$ , имеем:

$$\rho = \frac{F'}{F' G' - H'^2} II - \frac{H'}{F' G' - H'^2} I.$$

Подставляя значения  $F' G'$  и  $H'$  находим  $F' G' - H'^2 = 3f^2$ . Введем обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{F'}{3f^2} = F \\ \frac{G'}{3f^2} = G \\ \frac{H'}{3f^2} = H \end{array} \right\} \quad (14)$$

Подставляя  $F$ ,  $G$  и  $H$  в выражения  $\mu$  и  $\rho$  и имея ввиду, что в выражениях (d)  $a = +1$ , получим:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = GK_1 - HK_2 + (cG + dH)K_3 + (dG - cH)K_4 \\ \rho = -HK_1 + FK_2 - (dF + cH)K_3 + (cF - dH)K_4 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Подставляя  $\mu$  и  $\rho$  из (15) в (11), имеем нормальные уравнения коррелат:

$$\left. \begin{array}{l} [G]K_1 - [H]K_2 + [cG + dH]K_3 + [dG - cH]K_4 + v_1 = 0 \\ + [F]K_2 - [dF + cH]K_3 + [cF - dH]K_4 + v_2 = 0 \\ + [c^2G + d^2F + 2cdH]K_3 + [d^2H - c^2H + cdG - cdF]K_4 + v_3 = 0 \\ + [d^2G + c^2F - 2cdH]K_4 + v_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

Решая нормальные уравнения (16), получим коррелаты  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ , после чего, по уравнениям (15), вычисляем поправки  $\mu$  и  $\rho$  всех связующих сторон, и пользуясь уравнениями (8), простым суммированием определяем  $m_k$ , т. е. масштабные и азимутальные поправки всех свя-

зующих сторон, и по ним уже легко находим поправки к приращениям координат ходовой линии (формула 10).

Контролем правильности  $\mu$  и  $\rho$  служит сходимость сумм их с свободными членами  $v_1$  и  $v_2$ , а поправки к приращениям контролируются сходимостью сумм  $ix$  по ходовой линии с свободными членами  $v_3$  и  $v_4$ . Несомненно, что знаки при суммах, как в первом, так и во втором случае должны быть обратные соответствующим знакам  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$ .

После получения контроля для поправок к приращениям элементов, входящих в ходовую линию, вычисляются поправки к приращениям связующих сторон, не входящих в ходовую линию.

В виду того, что в основу уравнивания легло требование минимума суммы квадратов поправок к углам, мы имеем совершенно строгое решение уравнений, и поправки к приращениям сторон соответствуют минимальному изменению углов.

В формулах

$$F = \frac{F'}{3f^2} = \frac{2f^2}{3f^2} = +0.67$$

$$G = \frac{G'}{3f^2} = \frac{1}{3f^2} (p^2 + p'^2 + 1),$$

подставляя значения  $f$ ,  $p$  и  $p'$  в выражение для  $G$  и заменяя единицу через

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 C}, \quad \text{имеем:}$$

$$G = \frac{\sin^2 A \cos^2 B + \cos^2 A \sin^2 B + \sin^2 C}{3 \sin^2 A \sin^2 B}$$

Имея в виду, что

$$\sin^2 C = \sin^2(A + B) = (\sin A \cos B + \cos A \sin B)^2$$

по возведении в квадрат, приведении подобных членов и сокращении имеем окончательно:

$$G = \frac{G'}{3f^2} = \frac{2}{3} \left( \operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \right)$$

Таким образом мы находим, что  $G$  есть известное в геодезии выражение, называемое **ошибкой геометрической связи треугольника**.

Сделаем аналогичное преобразование выражения

$$H = \frac{H'}{3f^2} = \pm \frac{f(p - p')}{3f^2}.$$

После подстановки соответствующих значений  $f$   $p$  и  $p'$  имеем:

$$H = \pm \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{3 \sin A \sin B},$$

откуда

$$H = \pm \frac{1}{3} (\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A),$$

где  $+$  для правых от ходовой линии треугольников и  $-$  для левых.

#### 4. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ УРАВНИВАНИЯ.

$$1. f = \pm \frac{\sin A \sin B}{\sin C} \quad + \text{для правых по ходу треугольников и} \\ \quad - \text{для левых}$$

$$2. p = \frac{\sin A \cos B}{\sin C}$$

$$3. p' = 1 - p$$

$$4. F = \frac{F'}{3f^2} = \frac{2f^2}{3f^2} = +0.67$$

$$5. G = \frac{G'}{3f^2} \quad G' = p^2 + p'^2 + 1$$

$$6. H = \frac{H'}{3f^2} \quad H' = f(p - p')$$

7. Коэффициенты условных уравнений:

$$a_k = +1, \quad c_k = [\Delta x]_k^i, \quad d_k = [\Delta y]_k^i$$

8. Нормальные уравнения (16)

$$9. \mu = GK_1 - HK_2 + (cG + dH)K_3 + (dG - cH)K_4$$

$$\rho = -HK_1 + FK_2 - (dF + cH)K_3 + (cF - dH)K_4.$$

$$10. m_k = \sum_1^k \mu; r_k = \sum_1^k \mu$$

$$11. d(\Delta x) = m \wedge x - r \Delta y$$

$$d(\Delta y) = m \Delta y + r \Delta x$$

$$12. (C_k) = \pm \rho \frac{1}{\sin 1''} \quad \begin{array}{l} \text{для правых по ходу треугольников,} \\ \text{+ для левых} \end{array}$$

$$13. (A) = f\mu'' - p(C), \quad \text{где } f \text{ имеем знак плюс для всех тре-}$$

$$(B) = - (f\mu'' + p'(C)) \quad \text{угольников}$$

$$\mu'' = \frac{1}{\sin 1''} \mu$$

$$14. (A) + (B) + (C) = 0.$$

## 5. ПРАКТИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

Приведем здесь порядок действий при уравнивании.

1. Составляется схематический чертеж ряда (полигона).

2. Нумеруются треугольники, входящие в ряд, а также стороны треугольников, причем для треугольника с номером К исходная сторона имеет номер К—1, сторона продолжения номер К, а промежуточная сторона номер К со значком прим. Углы обозначаются обычным порядком—против исходной стороны угол В, промежуточный угол обозначается через С и против стороны продолжения—через А.

3. Приводятся все углы к плоским.

4. Решаются стороны треугольников.

5. Вычисляются те координаты, в которых предположено дать окончательный материал по триангуляции.

6. Определяются свободные члены полигонных уравнений, для чего полученные значения для логарифма конечной стороны, ее азимута и координат конечного пункта N сравниваются с данными для этих элементов значениями.

Знак полученных разностей устанавливается: **полученное значение минус данное.**

Разберем здесь случай определения свободных членов, когда обработка ведется в координатах Гаусса-Крюгера.

Решению координат предшествует определение редукций углов треугольников за кривизну и исправление за масштаб начальной и конечной стороны триангуляции. Если мы назовем данный логарифм для конечной

стороны (в Гауссовых координатах) через  $\lg S_{n_0}$ , то свободный член первого условного уравнения получится

$$v_1 = \frac{\lg S_n - \lg S_{n_0}}{10^7 M} = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M},$$

где  $M$  — модуль Бригговых логарифмов, а  $\Delta \lg S$  выражено в седьмых знаках логарифма.

Свободный член второго условного уравнения суть разность значений дирекциональных углов для конечной стороны, умноженная на  $\sin 1''$ .

$$v_2 = v_2'' \sin 1''.$$

Свободные члены третьего и четвертого условных уравнений подсчитываются, как на плоскости:

$$v_3 = X'_n - X_n$$

$$v_4 = Y'_n - Y_n.$$

Когда вычисление ведется в географических координатах, свободные члены первого и второго условных уравнений подсчитываются также, как и в предыдущем случае, с той разницей, что для первого уравнения логарифмы сторон вычисляются по плоским не редуцированным за кривизну углам треугольников, второй же свободный член надо исправить за сближение меридианов точек  $N N'$ , т. е.

$$v_2'' = \alpha'_n - \alpha_n - v_4'' \sin \varphi_n$$

$$v_2 = v_2'' \sin 1''.$$

При подсчете свободных членов третьего и четвертого уравнений, полученных в результате дифференцирования плоских формул

$$\Delta x = S \cos \alpha,$$

$$\Delta y = S \sin \alpha,$$

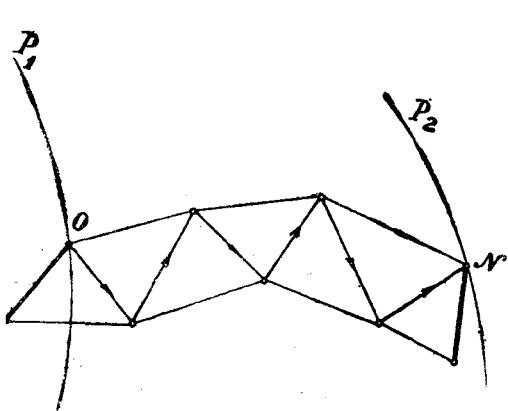
несхождения  $v\varphi = \varphi'_n - \varphi_n$ ,  $v\lambda = \lambda'_n - \lambda_n$  надо исправить за непараллельность меридианов начальной и конечной точки ходовой линии ряда.

Пусть на фиг. 3 исходный пункт триангуляции лежит на меридиане  $OP_1$ . Конечной точкой триангуляции пусть является пункт  $N$  на меридиане  $NP_2$ .

Положив свободные члены  $v_3$  и  $v_4$  равными

$$\varphi'_n - \varphi_n = v\varphi \text{ и } \lambda'_n - \lambda_n = v\lambda$$

в линейной мере, мы в результате уравнивания получим перемещение точки  $N'$  на эти величины, т. е.



Фиг. 3.

точки  $N$ , выраженные в линейной мере, пусть будут соответственно  $v_\varphi$  и  $v_\lambda$ , а свободные члены третьего и четвертого уравнений  $v_3$  и  $v_4$ ; тогда из фиг. 4 можем написать;

$$v_3 = v_\varphi \cos t + v_\lambda \sin t$$

$$v_4 = v_\lambda \cos t - v_\varphi \sin t,$$

где  $t = (\lambda' - \lambda_0) \sin \varphi$  — сближение меридианов точек  $O$  и  $N$ .

Знак  $t$  определяется разностью долгот — конечная минус начальная долгота.

Когда  $t$  не более  $1^\circ$ , можно положить  $\cos t = 1$ , и формулы примут вид:

$$v_3 = v_\varphi + v_\lambda \sin t$$

$$v_4 = v_\lambda - v_\varphi \sin t.$$

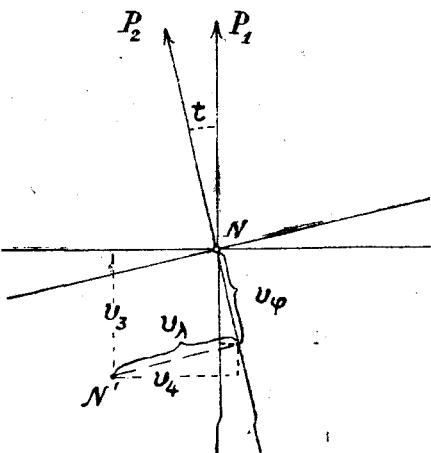
Свободные члены  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$ , для того чтобы не затруднить вычисления написанием малых дробей, полезно увеличить в  $10^6$  раз.

7. Вычисляются  $f$  и  $r$  по формулам (3), где  $f$  имеет знак плюс для треугольника, лежащего вправо от ходовой линии, и минус — для лежащего влево.

$$\delta X = \frac{v_\varphi}{(1)} \text{ и } \delta Y = \frac{v_\lambda}{(2)}$$

Но перемещение точки  $N'$  будет по оси, параллельной меридиану  $OP_1$ , а потому произведем небольшое преобразование свободных членов. Пусть на фиг. 4 точка  $N$  есть конечная точка триангуляции.  $NP_2$  есть меридиан точки  $N$ .

$NP_1$  есть меридиан, параллельный исходному меридиану в точке  $O$ . Несхождения в широтах и долготах

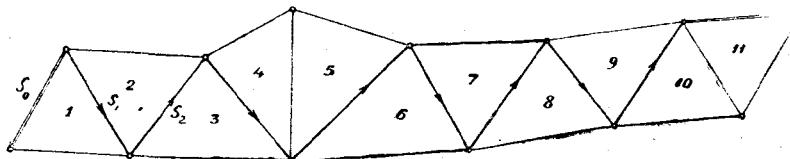


Фиг. 4.

Контролем правильности подсчета  $f$  и  $p$  может служить отношение

$$\frac{f}{p} = \operatorname{tg} B. \quad p' = 1 - p.$$

8. Выписываются приращения по связующим сторонам в направлении от точки  $O$  к точке  $N$  (фиг. 5), причем необходимо иметь в виду, что в



Фиг. 5.

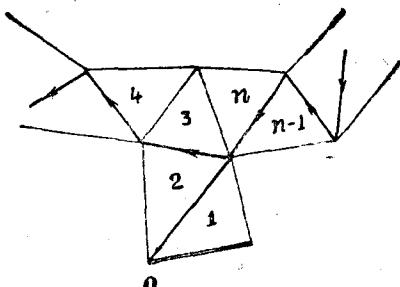
фор. (11) для 3 и 4 уравнений связующие стороны, например  $S_4$  треугольника 4, пропускаются, и против номера 4 графы для приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$  прочерчиваются. Таким образом для данного на фиг. 5 примера, техника составления коэффициентов условных уравнений, приведенная в таблице, заключается в том, что в первой граfe выписываются номера всех треугольников ряда; во второй и третьей граfe выписываются  $\Delta x$  и  $\Delta y$  связующих сторон рядка по ходовой линии со знаками, указанными стрелками по ходу от точки  $O$  к точке  $N$ . Связующие стороны, невходящие в ходовую линию, пропускаются, и графы  $\Delta x$  и  $\Delta y$  прочерчиваются.

Подсчет коэффициентов условных уравнений происходит путем простого суммирования снизу вверх, т. е. для сторон 10 и 11, как невходящих в ходовую линию, графы  $\Delta x$  и  $\Delta y$  прочерчиваются; для 9 выписывается  $\Delta x_9, \Delta y_9$ ; для стороны 8

<i>NN</i> <i>TP-B</i>	$\Delta x$	$\Delta y$	$C_k = [\Delta x]_k^c$	$d_k = [\Delta y]_k^c$
1	$\Delta x_1$	$\Delta y_1$	$[\Delta x]$	$[\Delta y]$
2	$\Delta x_2$	$\Delta y_2$	↑ 1	↑ 1
3	$\Delta x_3$	$\Delta y_3$	$\Delta x_9 + \dots + \Delta x_5, \Delta x_3$	$\Delta y_9 + \dots + \Delta y_5, \Delta y_3$
4	—	—	$\Delta x_9 + \dots + \Delta x_5$	$\Delta y_9 + \dots + \Delta y_5$
5	$\Delta x_5$	$\Delta y_5$	$\Delta x_9 + \dots + \Delta x_5$	$\Delta y_9 + \dots + \Delta y_5$
6	$\Delta x_6$	$\Delta y_6$	↑	↑
7	$\Delta x_7$	$\Delta y_7$	1	1
8	$\Delta x_8$	$\Delta y_8$	$\Delta x_9 + \Delta x_8$	$\Delta y_9 + \Delta y_8$
9	$\Delta x_9$	$\Delta y_9$	$\Delta x_9$	$\Delta y_9$
10	—	—	0	0
11	—	—	0	0
	$\sum [\Delta x]$	$\sum [\Delta y]$	$\sum [\Delta x]$	$\sum [\Delta y]$

$\Delta x_9 + \Delta x_8$  и  $\Delta y_9 + \Delta y_8$  и т. д. Этим суммированием и оканчивается составление коэффициентов третьего и четвертого уравнений. Контролем правильности составления служит сходимость коэффициентов с и d для первой стороны ходовой линии с  $[\Delta x]$  и  $[\Delta y]$ .

Разберем частный случай в выборе ходовой линии.



Фиг. 6.

Допустим, что связующая сторона получила поправки  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и  $r_1, r_2, \dots$ . Тогда промежуточная сторона треугольника 3 получит масштабную поправку

$$m'_3 = m_2 + p_3 \mu_3 - f_3 \rho_3 \text{ и азимутальную}$$

$$r'_3 = r_2 + p_3 \rho_3 + f_3 \mu_3, \text{ а потому}$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{n-1} + \mu_n = -v_1 + \mu_1 + \mu_2 + p_3 \mu_3 - f_3 \rho_3$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{n-1} + \rho_n = -v_2 + \rho_1 + \rho_2 + p_3 \rho_3 + f_3 \mu_3.$$

Перенося искомые в левую часть, имеем:

$$(1 - p_3) \mu_3 + \mu_4 + \dots + \mu_n + f_3 \rho_3 + v_1 = 0$$

$$(1 - p_3) \rho_3 + \rho_4 + \dots + \rho_n - f_3 \mu_3 + v_2 = 0.$$

Для третьего и четвертого уравнения имеем:

$$[\Delta x]_2^{n-1} + v_3 = 0; [\Delta y]_2^{n-1} + v_4 = 0.$$

Составление условных и нормальных уравнений, очевидно, в каждом отдельном случае легко может быть произведено по чертежу сети.

При мечание: При вычислении коэффициентов нормальных уравнений, полезно коэффициенты третьего и четвертого условных уравнений уменьшить в 1000 раз; свободные члены  $v_3$  и  $v_4$ , увеличенные в  $10^6$  раз против своего первоначального значения, очевидно, должно уменьшить соответственно изменению коэффициентов

условных уравнений. В том случае, когда ряд посередине между прямичными сторонами имеет одну или несколько геодезических точек, третье и четвертое уравнения разделяются на несколько уравнений по числу точек. Каждый базис и азимут будут увеличивать число условных уравнений, разделяя одно общее уравнение

$$[\mu]_1^n + v_1 = 0; [\rho]_1^n + v_2 = 0 \text{ на несколько по числу условий:}$$

$$[\mu]_1^k + v_1' = 0; [\mu]_k^i + v_1'' = 0 \dots [\rho]_1^k + v_2' = 0, [\rho]_k^i + v_2'' = 0 \dots$$

9. С полученными с, d, F, G, и H составляются нормальные уравнения коррелат.

Техника составления нормальных уравнений и контроля очевидна из приведенного ниже примера.

10. Решаются нормальные уравнения по схеме Гаусса.

11. Определяются по формулам (15) поправки  $\mu$  и  $\rho$  всех связующих сторон и по ним, по формулам (3), поправки к углам треугольников. Вычисляются по формуле (8)  $m_k$  и  $r_k$  связующих сторон.

12. Вычисляются поправки к координатам по формулам (10), или, если вычисление ведется в географических координатах, то с вычисленными поправками углов, поправки к широтам и долготам определяются по обычным дифференциальным формулам.

### Некоторые соображения о возможности округлений при вычислении.

Допустим, что вычисление должно вести так, чтобы при суммировании  $\mu$  расхождение в  $m_n$  не превосходило единицы седьмого знака логарифма.

Возьмем ряд из 50 треугольников, как максимальный. Согласно сказанному выше

$$\frac{1}{10^7 M} 10^6 = +0.23 \text{ (увеличенено в миллион раз).}$$

Если мы зададимся точностью вычисления  $\mu$  до 0,01, ошибка за окружление в каждом  $\mu$  не более 0,005. Или, предполагая, что влияние за окружление при суммировании будет возрастать по закону случайных явлений, будем иметь:

$$\Delta m = \Delta \mu \sqrt{n}; \text{ или принимая окруженно } \sqrt{50} = 7$$

$$\Delta m_n = \pm 0.005 \times 7 = \pm 0.035,$$

т. е. при условии, что свободные члены увеличены в  $10^6$  раз, вычисление  $\mu$  до 0,01 вполне достаточно.

Точность определения  $\rho$ :

$$\lg \sin I'' = 4.6856 \quad \rho \text{ соответствующее } I''$$

$$\lg 10^6 \frac{6.0000}{\lg 0.6856} \text{ выражается } 4,85 \text{ единицами}$$

$r_k + v_2 = [\rho] + v_2 = 0$ ; полагая, что  $v_2$  дано с точностью до  $0''01$ , будем иметь:  $0''01 = 0.0485$ . Полагая, как и выше,  $\sqrt{n} = 7$ , будем иметь:

$$\Delta r_k \text{ не более } \pm 0,0485, \text{ или}$$

$$\Delta \rho \cdot 7 \text{ не более } \pm 0,0485, \text{ откуда}$$

$$\Delta \rho \text{ не более } \pm 0,007,$$

т. е.  $\rho$  достаточно вычислять с точностью до 0,01.

Погрешность от округления  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и коэффициентов  $s$  и  $d$

$$\Delta x = s \cos \alpha, \Delta y = s \sin \alpha$$

$$d(\Delta x) = m \Delta x - r \Delta y$$

$$d(\Delta y) = m \Delta y + r \Delta x.$$

Положим, что при составлении условных и нормальных уравнений  $\Delta x$  и  $\Delta y$  были выписаны с округлением до сотых долей километров.

Допустим также, что с округленными значениями

$$[(m \Delta x - r \Delta y)] + v_3 = 0$$

$$[(m \Delta y + r \Delta x)] + v_4 = 0,$$

т. е. для ряда найдены такие  $m_k$  и  $r_k$ , которые строго соответствуют свободным членам. Задаемся, как и ранее, рядом в 50 треугольников.

Положим, что имеем ряд с большими свободными членами, и пусть в нем среднее

$$m = 50 \text{ единицам},$$

$$r = 50 \quad "$$

При выписывании  $\Delta x$  и  $\Delta y$  с точностью до сотых долей километров ошибка от округления, очевидно, может быть не более 5 м; полагая ошибку от округления пропорционально  $\sqrt{n}$  и имея ввиду, что  $s$  и  $d$  округлены до десятых долей километра.

$$\Delta [(m \Delta x - r \Delta y)] = \Delta [(m \Delta y + r \Delta x)] = \\ = \pm 50 \times 100 \times 7 = \pm 35000$$

или, принимая во внимание, что  $m$  и  $r$  увеличены в  $10^6$  раз, имеем:

$$\Delta x = \Delta y = \pm 0,035 \text{ м},$$

т. е. для рядов, имеющих небольшие свободные члены и меньшее количество треугольников, округление можно производить до десятых долей километра.

Значение округлений на точность определения коррелат, а вследствие этого и самих искомых, выявить значительно труднее.

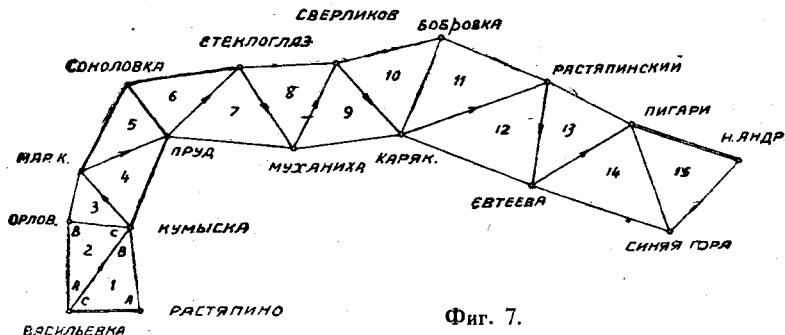
Приведенных соображений несомненно недостаточно, и установить те или иные допуски можно лишь на основе опыта.

## 6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА К ОБРАБОТКЕ РЯДОВ.

Для лучшего уяснения механизма вычислений приведем здесь обработку тригонометрического ряда полностью.

В качестве примера выбран ряд, приведенный в статье В. Кобзарь (Жур. Геодезист № 3 1929 г.).

Ряд обработан по Британскому способу, способом Hatt'a и Кобзаря.



Фиг. 7.

Фиг. 7 представляет ряд треугольников с исходной стороной Васильевка—Растяпино, логарифм которой  $\lg S_o = 4.183\ 2760$ , а координаты пунктов:

Васильевка

$$\varphi = 51^\circ 16' 30''. 770$$

$$\lambda = 48^\circ 41' 31. 300$$

$$\alpha \text{ на Раст.} = 90^\circ 13' 00. 16.$$

Растяпино

$$\varphi = 50^\circ 16' 28''. 169$$

$$\lambda = 48^\circ 54' 38. 131$$

$$\alpha \text{ на Вас.} = 270^\circ 23' 14. 01.$$

Конечной стороной ряда служила Пигари—Новая Андреевка, логарифм которой  $\lg S_n = 4.209\ 0430$ , а координаты пунктов

Пигари

$$\varphi = 51^\circ 25' 55''. 096$$

$$\lambda = 49^\circ 47' 35. 292$$

Новая Андреевка

$$\varphi = 51^\circ 22' 50''. 101$$

$$\lambda = 50^\circ 00' 38. 637$$

$$\alpha \text{ на Андр.} = 110^\circ 36' 05. 34$$

$$\alpha \text{ на Пиг.} = 290^\circ 46' 17. 65$$

Произведем нумерацию всех треугольников и всех связующих сторон треугольников на фиг. 7, а также приведем в табл. 1 список неуравненных треугольников.

Т а б л и ц а 1.

## Список неуравненных треугольников ряда.

№ № по порядку	Название пунктов	Углы приве- денные	Углы исправленные		lg sin	lg S
			Сферич.	Плоские		
1	Кумыска . . .	60°31' 7" 67	4" 67	4.50	9.939 7735	4.183 2760
	Васильевка . . .	63 37 17.46	14.46	14.30	9.952 2459	4.195 7483
	Растяпино . . .	55 51 44.37	41.37	41.20	9.917 8640	4.161 3664
2		9.50	0.50	0.00		
	Орловка . . .	75 54 48.02	47.11	47.01	9.986 7393	4.161 3664
	Кумыска . . .	65 25 29.21	28.30	28.20	0.958 7617	4.133 3888
	Васильевка . . .	38 39 45.80	44.89	44.79	9.795 6930	3.970 3201
3		3.03	0.30	0.00		
	Мар Карепанов .	64 5 7.74	8.94	8.89	9.953 9768	3.970 3201
	Кумыска . . .	35 28 45.25	46.45	46.40	9.763 7367	3.780 0800
4	Орловка . . .	80 26 3.56	4.76	4.71	9.993 9195	4.010 2628
		56.55	0.15	0.00		
	Соколовка . . .	52 41 39.33	35.38	35.30	9.900 5861	4.010 2628
5	Мар Карепанов .	53 36 36.75	32.80	32.72	9.905 7893	4.015 4661
	Кумыска . . .	73 41 56.02	52.07	51.98	9.982 1782	4.091 8549
		12.10	0.25	0.00		
6	Пр. Корепанов .	61 31 30.05	30.68	30.61	9.944 0020	4.091 8549
	Пр. Корепанов .	88 21 11.15	11.77	11.69	9.999 8206	4.147 6735
	Мар Корепанов .	30 7 17.14	17.77	17.70	9.700 5623	3.848 4153
7		58.34	0.22	0.00		
	Стеклогаз . . .	42 38 2.18	56.86	56.81	9.830 7764	3.848 4153
	Пр. Корепанов .	71 45 4.37	55.64	55.58	9.977 5830	3.995 2219
	Соколовка . . .	65 37 6.37	7.66	7.61	9.959 4321	3.977 0710
8		12.92	0.16	0.00		
	Муханиха . . .	40 41 17.63	18.70	18.60	9.814 2118	3.977 0710
	Стеклогаз . . .	79 40 58.14	59.21	59.10	9.992 9210	4.155 7803
	Пр. Карепанов .	59 37 41.33	42.40	42.30	9.935 8922	4.098 7514
9		57.10	0.31	0.00		
	Свердиков . . .	56 45 56.56	53.09	52.98	9.922 4280	4.098 7514
	Муханиха . . .	44 20 36.68	33.21	33.10	9.844 4438	4.020 7672
10	Стеклогаз . . .	78 53 37.51	34.03	33.92	9.991 7878	4.168 1112
		10.75	0.33	0.00		

№ по порядку	Название пунктов	Углы приве- дные		Углы исправленные		lg sin	lg S
		Сферич.	Плоские				
9	Карякина . . .	52°50' 25".03	28. 28	28. 10	9.901 4386	4.168 1112	
	Сверликов . . .	67 38 30. 65	33. 89	33. 71	9.966 0618	4.232 7344	
	Муханиха . . .	55 30 55. 12	58. 37	58. 19	9.935 3926	4.202 0652	
10		50. 80	0. 54	0. 00			
	Бобровка . . .	70 39 30. 45	27. 64	27. 50	9.974 7678	4 202 0652	
	Карякина . . .	58 5 35. 85	33. 05	32. 90	9.928 8576	4.156 1550	
	Сверликов . . .	51 15 2. 55	59. 75	59. 60	9.892 0296	4.119 3270	
11		8. 85	0. 44	0. 00			
	Растяпинский . .	36 41 13. 77	15. 60	15. 41	9.776 3029	4.119 3270	
	Карякина . . .	53 41 8. 29	10. 12	9. 92	9.906 2189	4.249 2430	
	Бобровка . . .	89 37 33. 03	34. 87	34. 67	9.999 9907	4.343 0148	
12		55. 09	0. 59	0. 00			
	Евтеева . . .	66 26 31. 27	30. 72	30. 42	9.962 2057	4.343 0148	
	Растяпин . . .	64 28 22. 64	22. 10	21. 79	9.955 3896	4.336 1987	
	Кирякина . . .	49 5 8. 64	8. 10	7. 79	9.878 3424	4.259 1515	
13		2. 55	0. 92	0. 00			
	Пигари . . .	55 36 58. 88	56. 50	56. 30	9.916 5919	4.259 1515	
	Евтеева . . .	72 29 5. 09	3. 76	3. 50	9.979 3819	4.321 9385	
	Растяпин . . .	51 54 2. 78	0. 45	0. 20	9.895 9392	4.238 4958	
14		7.75	0. 76	0. 00			
	Син. гора . . .	49 47 23. 58	23. 44	23. 21	9.882 9119	4.238 4958	
	Пигари . . .	83 34 52. 37	52. 22	51. 98	9.997 2689	4.352 8528	
	Евтеева . . .	46 37 45. 18	45. 04	44. 81	9.861 4889	4.217 0728	
15		1. 13	0. 70	0. 00			
	Нов. Андр. . .	62 13 36. 77	36. 89	36. 71	9.946 8449	4.217 0728	
	Пигари . . .	57 28 46. 77	46. 89	46. 68	9.925 9308	4.196 1587	
	Син. гора . . .	60 17 36. 67	36. 79	36. 61	9.938 8075	4.209 0354	
		0. 21	0. 57	0. 00			

По вычислении сторон, логарифмы которых приведены в табл. 1, произведено вычисление широт и долгот пунктов ряда, при чем оказалось:

Пигари

$$\varphi = 51^\circ 25' 54".003$$

$$\lambda = 46^\circ 47' 35.166$$

$$\alpha \text{ на Н. Андреев, } 110^\circ 36' 01".66.$$

Подсчет свободных членов уравнений приведен в табл. 2.

Таблица 2

## Подсчет свободных членов условных уравнений

$\lg S$	Цолуя.	4.209 0354	$A_3$ , получ.	$110^\circ 36' 01.^m 66$	$\varphi'$	$51^\circ 25' 55.^m 003$	$\lambda'$	$49^\circ 47' 35.^m 166$
, данн.		0430	, данн.	5.^s 34	$\varphi_o$	.096	$\lambda_o$	.292
$\Delta$	—	76	$\Delta$	—3.^s 68	$v \varphi''$	— 0.093	$v \lambda''$	— 0.^s 126
$\lg \Delta$	1.880 81	$-(\lambda - \lambda_o) \sin \varphi$		+ 10	$\lg v \varphi''$	8.968 4829n	$\lg v \lambda''$	9.100 3705n
$\frac{1}{10^7 M}$	3.362 22	$v_2''$		— 3.58	доп. (1)	1.489 9735	доп. (2)	1.491 1062
$\lg V'$	5.243 03	$\lg v_2''$		0.55 388n	$\lg v \varphi$	0.458 4564n	$\lg \cos \varphi$	9.794 7973
$\lg 10^6 V'$	1.213 03	$\lg \sin 1^o$		4.68 557	$v \varphi$	— 2.874 м.	$\lg v_4'$	0.386 2740
$V_1$	— 17,50	$\lg v_2'$		5.23 945n	$t$	+ 51.^s 35"	$v_4'$	— 2.434 м.
		$\lg 10^6 v_2'$		1 23 945n	$v \varphi \cos t$	— 2.873,	$v \lambda \cos t$	— 2.434
		$v_2$		— 17.36	$+ v \lambda \sin t$	— 0.047	$- v \varphi \sin t$	+ 0.054
					$v_3'$	— 2.920	$v_4''$	— 2.380
					$10^6 v_3'$	— 2920 000	$10^6 v_4$	— 2380 000
					$v_3$	— 29 20	$v_4$	— 23 80

Произведен подсчет по формулам (3) постоянных треугольников  $f$ ,  $p$  и  $p'$  по трехзначным таблицам логарифмов, а также вспомогательных величин  $G$  и  $H$  по формулам (3), (12) и (14), при чем очевидно  $F = +0.67$ .

Подсчет  $f$ ,  $p$  и  $p'$  приведен в табл. 3.

Необходимо заметить, что подсчет величин  $f$ ,  $p$  и  $p'$  в виду важности их, должен производиться в две руки, или же употреблять контроль-

ные вычисления  $\frac{f}{p} = \operatorname{tg} B$ .

Знак  $p$  определяется  $\cos B$ , знак же  $f$  необходимо соображать по чертежу, именно: для треугольников, лежащих вправо от ходовой линии — знак плюс, а для лежащих влево — знак минус.

Знаки  $F$  и  $G$  всегда положительны. Знак  $H$  зависит от знака

$$H' = f(p - p').$$

По таблице приращений прямоугольных координат найдены приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  связующих и промежуточных сторон.

Выбрана до чертежу ходовая линия по связующим сторонам, руководствуясь п. 8 практических указаний, и выбраны приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  со знаками соответствующими направлению ходовой линии (фиг. 7).

В табл. 4 приведено вычисление  $c$  и  $d$  — коэффициентов третьего и четвертого условных уравнений, а также коэффициентов нормальных уравнений коррелат.

Приведем пояснение к таблице коэффициентов условных уравнений и уравнений коррелат.

Графа 1 — номера всех треугольников ряда.

2, 3 — приращения по ходовой линии с сотыми знаками километров.

4, 5 и 6 — суть постоянные треугольников.

7 — сумма  $F G$  и  $H$  для контроля.

8, 9 — коэффициенты третьего и четвертого условных уравнений (см. п. 8 практ. указ.).

10—13 и 18—21 суть произведения, входящие в уравнения коррелат; из них 13 и 21 являются контрольными.

14—17 и 22—25 суть квадратные члены уравнений, причем они получаются перемножением соответствующих  $c$ ,  $cF$ ,  $cS$ , а также  $d$ ,  $dF$ ,  $dS$ . 17 и 25 суть контрольные графы.

26—29 понятны без объяснений.

Таким образом получились нормальные уравнения

$$\begin{aligned} &+ 16,01 K_1 - 0.19 K_2 - 2.40 K_3 + 746.90 K_4 - 17.50 = 0 \\ &+ 10.05 K_2 - 464.10 K_3 - 42.90 K_4 - 17.36 = 0 \\ &+ 28988 K_3 + 1317 K_4 - 2920 = 0 \\ &+ 46378 K_4 - 2380 = 0 \end{aligned}$$

Формулы, по которым составляются нормальные уравнения, даны в теоретической части (форм. 16).

## П О Д С Ч Е Т П О С Т О Я Н И І

Номера тре- угольников	1	2	3	4	5	6	7
$3f^2$	+ 1.92	+ 1.32	+ 6.93	+ 2.70	+ 0.57	+ 1.26	+ 0.
$f^2$	+ 0.64	+ 0.44	+ 2.31	+ 0.88	+ 0.19	+ 0.42	+ 0.
$f$	+ 0.806	- 0.667	- 1.528	+ 0.949	- 0.442	- 0.650	+ 0.
$\lg f$	9.906	9.824	0.184	9.977	9.645	9.812	9.75
$\sin B$	9.940	9.987	9.954	9.901	9.944	9.831	9.81
$\partial \sin C$	0.048	0.041	0.236	0.094	0.000	0.022	0.00
$\sin A$	9.918	9.796	9.994	9.982	9.701	9.959	9.93
$\cos B$	9.692	9.386	9.641	9.783	9.678	9.867	9.88
$\lg p$	9.658	9.223	9.871	9.859	6.379	9.848	9.82
$p$	+ 0.455	+ 0.167	+ 0.743	+ 0.723	+ 0.239	+ 0.705	+ 0.
$p'$	+ 0.545	+ 0.833	+ 0.257	+ 0.277	+ 0.761	+ 0.295	+ 0.
$\frac{f}{p}$	1.767	3.988	2.055	1.313	1.845	0.921	0.8
$\operatorname{tg} B$	1.768	3.985	2.058	1.313	1.843	0.921	0.8
$p^2$	0. 20	0. 02	0. 54	0. 21	0. 05	0. 50	0.
$p'^2$	0. 30	0. 68	0. 06	0. 07	0. 57	0. 08	0.
$G'$	+ 1. 50	+ 1. 70	+ 1. 60	+ 1. 58	+ 1. 62	+ 1. 58	+ 1.
$p-p'$	- 0. 09	- 0. 67	+ 0. 48	+ 0. 44	- 0. 52	+ 0. 41	+ 0.
$H'$	- 0. 07	+ 0. 45	- 0. 73	+ 0. 42	+ 0. 23	- 0. 27	+ 0.
$G$	+ 0. 78	+ 1. 29	+ 0. 23	+ 0. 59	+ 2. 82	+ 1. 26	+ 1.
$H$	- 0. 04	+ 0. 34	- 0. 10	+ 0. 16	+ 0. 40	- 0. 21	+ 0.

ОЛЬНИКОВ.

Таблица 3.

9	10	11	12	13	14	15
+ 1.62	+ 2.25	+ 1.62	+ 1.77	+ 1.38	+ 0.93	+ 2.46
+ 0.54	+ 0.75	+ 0.54	+ 0.59	+ 0.46	+ 0.31	+ 0.82
+ 0.74	- 0.867	- 0.741	+ 0.767	- 0.683	+ 0.558	+ 0.912
9.870	9.938	9.870	9.885	9.834	9.747	9.960
9.901	9.975	9.976	9.962	9.917	9.883	9.947
0.034	0.071	0.094	0.045	0.021	0.003	0.074
9.935	9.892	0.000	9.878	9.896	9.861	9.939
9.781	9.520	9.904	9.602	9.752	9.810	9.668
9.750	9.483	9.998	9.525	9.669	9.674	9.681
+ 0.562	+ 0.304	+ 0.996	+ 0.335	+ 0.467	+ 0.472	+ 0.480
+ 0.438	+ 0.696	+ 0.004	+ 0.665	+ 0.533	+ 0.528	+ 0.520
1.320	2.852	0.746	2.292	1.461	1.184	1.900
1.319	2.849	0.745	2.294	1.461	1.183	1.899
0.31	0.09	1.00	0.10	0.22	0.22	0.23
0.19	0.49	0.00	0.43	0.28	0.28	0.27
+ 1.50	+ 1.58	+ 2.00	+ 1.52	+ 1.50	+ 1.50	+ 1.50
+ 0.12	- 0.39	+ 1.00	- 0.33	- 0.07	- 0.06	- 0.04
+ 0.09	+ 0.34	- 0.74	- 0.25	+ 0.04	- 0.03	- 0.04
+ 0.93	+ 0.7	+ 1.23	+ 0.87	+ 1.09	+ 1.61	+ 0.61
+ 0.06	+ 0.15	- 0.46	- 0.14	+ 0.03	- 0.03	- 0.02

Таблица 4.

## Составление условных уравнений и нормальных уравнений коррелят

Номер таблицы	$\Delta x$ в см	$\Delta y$ в см	F	G	H	S	c	d	cF	cG	cH	cS	$c^2 F$	$c^2 G$	$c^2 H$	$c^2 S$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17					
1	+ 12.96	+	6.49	+	0.67	+	0.78	-	0.04	+	1.41	+ 18.0	+ 76.5	+ 12.1	+ 14.0	- 0.7	+ 25.4	+ 218	+ 252	- 13	+ 457
2	-	-	0.67	-	1.29	+	0.34	2.30	+ 5.1	70.0	+	3.4	+ 6.6	+ 1.7	+ 11.7	17	34	+	9	60	
3	+ 6.23	-	8.12	0.67	0.23	-	0.10	0.80	+ 5.1	70.0	+	3.4	+ 1.2	- 0.5	+ 4.1	17	6	-	3	21	
4	+ 3.43	+	11.87	0.67	0.59	+	0.16	1.42	-	1.2	78.2	- 0.8	- 0.7	- 0.2	- 1.7	1	1	0	0	2	
5	-	-	0.67	2.82	+ 0.40	3.89	4.6	66.3	- 3.1	- 13.0	- 1.8	- 17.9	14	60	+ 8	82	-	-	-		
6	+ 5.58	+	7.68	0.67	1.26	-	0.21	1.72	- 4.6	66.3	- 3.1	- 5.8	+ 1.0	- 7.9	14	27	-	5	36		
7	- 11.32	+	5.41	0.67	1.60	+	0.20	2.47	- 10.2	58.6	- 6.8	- 16.3	- 2.0	- 25.2	69	166	+ 20	20	257		
8	+ 13.97	+	4.72	0.67	0.40	-	0.15	0.92	+ 1.1	53.2	+ 0.7	+ 0.4	- 0.2	+ 1.0	1	0	0	0	1		
9	- 10.45	+	12.01	0.67	0.93	+	0.06	1.66	- 12.8	48.5	- 8.6	- 11.9	- 0.8	- 21.2	110	152	- 10	271	-		
10	-	-	0.67	0.70	+ 0.15	1.52	-	2.4	36.5	- 1.6	- 1.7	- 0.4	- 3.6	4	4	+ 1	9	-			
11	+ 10.07	+	19.59	0.67	1.23	-	0.46	1.44	- 2.4	36.5	- 1.6	- 3.0	+ 1.1	- 3.5	4	7	-	3	8		
12	- 18.15	+	0.53	0.67	0.87	-	0.14	1.40	- 12.4	16.9	- 8.3	- 10.8	+ 1.7	- 17.4	103	134	- 21	216	-		
13	+ 5.70	+	16.36	0.67	1.09	+	0.03	1.79	+ 5.7	16.9	+ 3.8	+ 6.2	+ 0.2	+ 10.2	+ 22	+ 35	+ 1	+ 58	-		
14	-	-	0.67	1.61	-	0.03	2.25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
15	-	-	0.67	+ 0.61	-	0.02	+ 1.26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
-	+ 18.03	+	76.54	+ 10.05	+ 16.01	+	0.19	+ 26.25	-	-	-	- 10.5	- 34.8	- 0.9	- 46.0	+ 594	+ 878	+ 4	+ 1478	-	

Продолжение таблицы 4

Таблица 5.

Лист А

## Решение нормальных уравнений коррелат

v	1	2	3	4	s
- 17.50	+ 16.01	- 0.19	- 2.40	+ 746.9	+ 742.82
1.24 304n	1.20 439	9.27 875n	0.38 021n	2.87 326	2.87 088
0.03 865n	-	8.07 436n	0.17 582n	1.66 887	1.66 649
+ 1.0931	- 17.36	+ 10.05	- 464.10	- 42.60	- 514.50
- 6.9225	- 0.21	0.00	- 0.03	+ 8.86	+ 8.82
+ 0.0745	- 17.57	+ 10.05	- 464.13	- 34.04	- 505.68
+ 0.2992	1.24 477n	1.00 217	2.66 664n	1.53 199n	2.70 387n
K <sub>1</sub> -5.4577	0.24 260n	-	1.66 447n	0.52 982n	1.70 170n
	- 2920	+ 28 988	+ 1 317	+ 26 918	
	+ 1.7482	- 3	0	+ 112	+ 111
	+ 0.5026	- 811	- 21 435	- 1 572	- 23 353
	+22.9615				
	- 3734	+ 7 553	- 143	+ 3 676	
K <sub>2</sub>	+25.2126	3.57 217n	3.87 812	2.15 534n	3. 56 538
	9.69 405n	-	8 27 782n	9. 68 726	
lg K <sub>2</sub>	1.40 162				
	+ 0.4944	- 2 380	+ 46 378	+ 46 019	
	+ 0.0028	+ 817	- 34 844	- 34 654	
	-	60	- 115	- 1 713	
K <sub>3</sub>	+ 0.4972	- 71	- 3	+ 70	
lg K <sub>3</sub>	9.69 653	- 1694	+ 11 416	+ 9 722	
		3.22 891n	4.05 752		
	lg K <sub>4</sub>	9.17 139			
K <sub>4</sub>	+ 0.1484				

Таблица 6.

Лист Б.

v	1	2	3	4	s
	—	9.27 875 <sub>n</sub>	0.38 021 <sub>n</sub>	2.87 326	—
		9.31 740	0.41 886	2.91 191 <sub>n</sub>	
		7.35 311	9.55 603	4.54 213	
		8.45 457	2.01 908 <sub>n</sub>	4.53 975	
		0.91 762 <sub>n</sub>	2.04 670 <sub>n</sub>		
		0.94 524 <sub>n</sub>			
	1.40 162	—	2.66 664 <sub>n</sub>	1.53 199 <sub>n</sub>	
	9.47 598 <sub>n</sub>		2.90 924	1.77 459	
			4.33 111	2.06 181	
			3.19 646	3.23 369	
			4.36 834		
		9.69 653	—	2.15 534 <sub>n</sub>	
		1.36 100 <sub>n</sub>		1.84 939	
		8.87 235 <sub>n</sub>		0.43 256	
				1.84 260 <sub>n</sub>	
			• 9.17 139		
			7.44 861 <sub>n</sub>		
			9.70 121 <sub>n</sub>		
			0.84 026		

Так как коэффициенты третьего и четвертого условных уравнений уменьшены в  $10^3$ , то при составлении уравнений свободные члены (табл. 2), увеличенные заранее в  $10^6$  изменены в зависимости от уменьшения в  $10^3$  коэффициентов условных уравнений, именно:

$$10^6 v'_1 = -2920000 \text{ и уменьшенное в } 10^3 v_3 = -2920$$

$$10^6 v'_4 = -2380000 \text{ и уменьшенное в } 10^3 v_4 = -2380$$

С полученными коррелатами произведено вычисление искомых  $\mu$  и  $\rho$  (табл. 7 формулы 15), причем контролем правильности их служит равенство

$$[\mu]_1^n + v_1 = 0 \quad [\rho]_1^n + v_2 = 0$$

## Вычисление масштабных и азимутальных

номера тр-ков	G	- H	cG+dH	dG-cH	GK <sub>1</sub>	-HK <sub>2</sub>	(cG+dH)K <sub>3</sub>	(dG-cH)K <sub>4</sub>	$\mu$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	+ 0.78	+ 0.04	+ 10.9	+ 60.4	- 4.26	+ 1.01	+ 5.42	+ 8.96	+ 11.
2.	1.29	- 0.34	+ 30.4	+ 88.6	- 7.04	- 8.57	+ 15.11	+ 13.15	+ 12.
3.	0.23	+ 0.10	- 5.8	+ 16.6	- 1.25	+ 2.52	- 2.88	+ 2.46	+ 0.
4.	0.59	- 0.16	+ 11.8	+ 46.3	- 3.23	- 4.03	+ 5.86	+ 6.87	+ 5.
5.	2.82	- 0.40	+ 13.5	+ 188.8	- 15.39	- 10.09	+ 6.71	+ 28.02	+ 9.
6.	1.26	+ 0.21	- 19.7	+ 82.5	- 7.88	+ 5.29	- 9.79	+ 12.24	+ 0.
7.	1.60	- 0.20	- 4.6	+ 95.8	- 8.73	- 5.04	- 2.29	+ 14.22	- 1.
8.	0.40	+ 0.15	- 7.6	+ 21.5	- 4.20	+ 3.78	- 3.78	+ 3.19	+ 1.
9.	0.93	- 0.06	- 9.0	+ 45.9	- 4.28	- 1.51	- 4.47	+ 6.81	- 4.
10.	0.70	- 0.15	+ 4.0	+ 26.0	- 4.82	- 3.78	+ 1.99	+ 3.86	- 1.
11.	1.23	+ 0.46	- 19.8	+ 43.8	- 6.61	+ 11.60	- 9.84	+ 6.50	+ 1.
12.	0.87	+ 0.14	- 13.2	+ 13.0	- 4.75	+ 3.53	- 6.56	+ 1.93	- 1.
13.	1.09	- 0.03	+ 6.7	+ 17.7	- 5.95	- 0.76	+ 3.33	+ 2.63	- 0.
14.	1.61	+ 0.03	-	-	-	+ 0.76	-	-	- 1.
15.	+ 0.61	+ 0.02	-	-	-	+ 0.50	-	-	- 1.
	+16.01	- 0.19	- 2.4	+746.9	- 87.38	- 4.79	- 1.19	+ 110.84	+1.

поправок через коррелаты.

Таблица 7.

$(dF + cH)$ 11	$cF - dH$ 12	$- HK_1$ 13	$FK_2$ 14	$- (dF + cH)K_3$ 15	$(cF - dH)K_4$ 16	$\rho$ 17	$m$ 18	$r$ 19
50.6	+ 15.2	- 0.22	+ 16.89	- 25.16	+ 2.26	- 6.23	+ 11.13	- 6.23
48.6	- 20.4	+ 1.86	16.89	- 24.16	- 3.03	- 8.44	23.78	- 14.67
46.4	+ 10.4	- 0.55	16.89	- 23.05	+ 1.55	- 5.16	24.63	- 19.83
52.2	- 13.3	+ 0.88	16.89	- 25.93	- 1.98	- 10.14	30.10	- 29.97
42.6	- 29.6	+ 2.19	16.89	- 21.16	- 4.39	- 6.47	39.35	- 36.44
45.4	+ 10.8	- 1.15	16.89	- 22.55	+ 1.61	- 5.20	40.21	- 41.61
37.3	- 18.5	+ 1.09	16.89	- 18.55	- 2.75	- 3.32	38.37	- 44.96
35.4	+ 8.7	- 0.82	16.89	- 17.60	+ 1.30	- 0.23	39.38	- 45.19
31.7	- 11.5	+ 0.33	16.89	- 15.75	- 1.71	- 0.24	35.13	- 45.43
21.1	- 7.3	+ 0.82	16.89	- 11.98	- 1.09	+ 4.46	33.38	- 40.79
25.6	+ 15.2	- 2.51	16.89	- 12.72	+ 2.26	+ 3.92	34.93	- 36.87
13.0	- 5.9	- 0.77	16.89	- 6.46	- 0.88	+ 8.78	29.08	- 28.09
11.2	+ 3.3	+ 0.16	16.89	- 5.57	+ 0.49	+ 11.97	28.33	- 16.12
-	-	- 0.16	16.89	-	-	+ 16.73	20.30	+ 0.61
-	-	- 0.11	+ 16.89	-	-	+ 16.78	+ 17.47	+ 17.39
4611	- 42.9	+ 1.04	+ 253.35	- 230.75	+ 6.37	+ 17.39		

В графах 2-5 и 11-12 табл. 7 приведены разности или суммы, получаемые из таблиц нормальных уравнений, причем необходимо заметить, что при выписывании из табл. 4 значения их переписываются без изменения.

Контролем правильности 2-5 и 11-12 служит сходимость сумм их и знаков с коэффициентами первого и второго нормальных уравнений, именно 2-5 суть коэффициенты первого нормального уравнения и 11-12 второго нормального уравнения.

Полученные искомые  $\mu$  и  $\rho$ , а также  $m$  и  $r$ , вследствие увеличения свободных членов в  $10^6$  раз, также увеличены в миллион раз, что представляет известное удобство, так как иначе искомые выражались бы весьма малой дробью, неудобной для написания.

В качестве примера в табл. 15 приведено вычисление поправок к координатам вершин триангуляции по формулам (10), причем сходимость суммы поправок к приращениям с свободными членами третьего и четвертого условных уравнений указывает на отсутствие промахов в вычислении.

Пользоваться формулами (10) можно лишь при вычислении поправок к координатам Гаусса-Крюгера. В том случае, когда вычисление ведется в географических координатах, необходимо вычислить поправки ко всем углам триангуляции.

Вычисление поправок к углам приведено в табл. 8, причем здесь необходимо указать, что  $\mu$  и  $\rho$  помножением на 0.20626, т. е. на

$$\frac{1}{10^6 \sin 1''}$$

переведены в секунды дуги.

В формулах

$$(A) = f\mu - p(C)$$

$$(B) = -(f\mu + p'(C))$$

$f$  имеет всюду знак плюс, так как знак минус при  $f$  в табл. 3 придан левым треугольникам исключительно для составления нормальных уравнений.

$r$  и  $p'$  имеют те же знаки, как и в табл. 3.

Подсчет поправок к углам необходимо производить в две руки, так как в переводе  $\mu$  и  $(C)$  в секунды возможны просчеты, которые контрольным вычислением  $(A) + (B) + (C) = 0$  установить невозможно.

Тоже самое надо заметить относительно произведения  $\mu'f$ . Вообще же при пользовании арифмометром или логарифмической линейкой эти действия не представляют затруднений. Величины  $f$ ,  $r$  и  $p'$  легко контролируются в табл. 3, а  $\mu$  и  $\rho$  в табл. 7.

По вычислении поправок к углам и решении сторон поправки к географическим координатам определяются по обычным дифференциальным формулам.

Таблица 8.  
Вычисление поправок к углам треугольников.

Номера треуголь- ников	1	2	3	4	5	6	7
f	+ 0.806	+ 0.667	+ 1.528	+ 0.949	+ 0.442	+ 0.650	+ 0.572
p	+ 0.455	+ 0.167	+ 0.743	+ 0.722	+ 0.239	+ 0.705	+ 0.665
p'	+ 0.545	+ 0.833	+ 0.257	+ 0.277	+ 0.761	+ 0.295	+ 0.335
$\mu''$	+ 2.296	+ 2.609	+ 0.175	+ 1.128	+ 1.908	+ 0.176	- 0.380
$f\mu''$	+ 1.851	+ 1.740	+ 0.267	+ 1.070	+ 0.843	+ 0.115	- 0.217
p(C)	+ 0.582	- 0.291	- 0.787	+ 1.509	- 0.318	- 0.755	+ 0.452
p'(C)	+ 0.698	- 1.449	- 0.273	+ 0.581	- 1.012	- 0.315	+ 0.228
(A)	+ 1.27	+ 2.03	+ 1.03	- 0.45	+ 1.16	+ 0.87	- 0.67
(B)	- 2.55	- 0.29	+ 0.03	- 1.64	+ 0.17	+ 0.20	- 0.01
(C)	+ 1.28	- 1.74	- 1.06	+ 2.09	- 1.33	- 1.07	+ 0.68
-	0	0	0	0	0	0	0

Продолжение таблицы 8.

8	9	10	11	12	13	14	15
+ 1.175	+ 0.741	+ 0.867	+ 0.741	+ 0.767	+ 0.683	+ 0.558	+ 0.912
+ 0.771	+ 0.562	+ 0.304	+ 0.996	+ 0.335	+ 0.467	+ 0.472	+ 0.480
+ 0.229	+ 5.438	+ 0.696	+ 0.004	+ 0.665	+ 0.533	+ 0.528	+ 0.520
+ 0.208	- 0.877	- 0.361	+ 0.320	- 1.207	- 0.155	- 0.656	- 0.584
+ 0.244	- 0.650	- 0.313	+ 0.237	- 0.926	- 0.106	- 0.924	- 0.533
- 0.038	+ 0.028	+ 0.292	+ 0.806	- 0.606	+ 1.151	- 1.628	- 1.660
- 0.012	+ 0.022	+ 0.668	+ 0.004	- 1.204	+ 1.319	- 1.822	- 1.799
+ 0.29	- 0.68	- 0.61	- 0.56	- 0.32	- 1.25	+ 0.70	+ 1.11
- 0.24	+ 0.63	- 0.35	- 0.25	+ 2.22	- 1.22	+ 2.75	+ 2.35
- 0.05	+ 0.06	+ 0.96	+ 0.81	- 1.81	+ 2.47	- 3.45	- 3.46
0	0	0	0	1	0	0	0

Необходимо заметить, что поправки к логарифмам связующих сторон легко получить непосредственно путем помножения  $m_1 m_2 \dots m_n$  на логарифм  $10e = 4.3429$ , что может служить полным контролем вычисления углов, так как при всяком промахе в вычислении поправок к углам в логарифмах получатся расхождения.

Поправки к логарифмам промежуточных сторон могут быть подсчитаны по формулам (2) и (3).

Приведенные в табл. 8 поправки к углам дают полное согласие с поправками, полученными по Британскому способу, отличаясь от них на незначительные доли секунды.

## 7. СООБРАЖЕНИЯ О МИНИМУМЕ ДЕФОРМАЦИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Согласно схемы государственной триангуляции<sup>\*)</sup>, вся территория СССР покрывается рядами первоклассных триангуляций, располагающихся по меридианам и параллелям и образующих трапеции с примерной стороной в 200 км. Согласно той же схемы, пространство, ограниченное первоклассными рядами, разбивается на три части двумя меридиональными рядами II класса и одним рядом II класса, расположенным по параллели.

В узловых частях триангуляций предусматривается определение точных базисов и астрономических данных (широты, долготы и азимута).

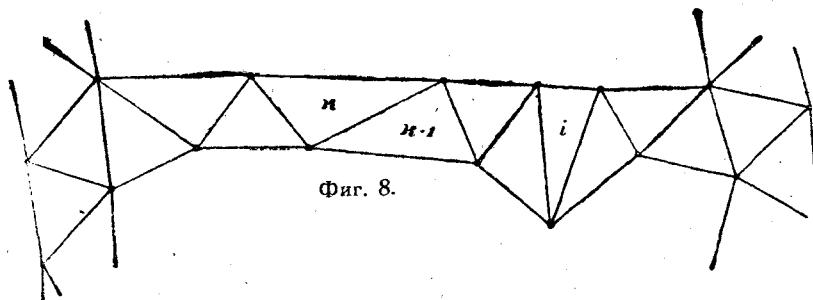
Все пространство, свободное от рядов I и II класса, покрывается заполняющими сетями II класса и пунктами III класса.

Если принять продвиг двух треугольников II класса равным 15 км, то количество треугольников в ряде, согласно схемы триангуляций, равно около 25.

Нашей целью является рассмотрение вопроса, является ли уравнивание под условием минимума суммы квадратов поправок к углам всегда целесообразным и вероятным решением. Допустим, что мы имеем ряд, состоящий из одинаковой формы треугольников и положим также, что по смыслу доминирующего свободного члена ряд должен вытянуться. Минимуму суммы квадратов поправок к углам в данном случае соответствует одинаковое (симметричное) изменение одноименных углов. Если бы, допустим, базисное условие отсутствовало, то поправки в одноименных углах треугольников были бы почти одинаковы и убывали бы к концу ряда. В случае, когда имеется базисное условие и, предположим, свободный член его равен нулю, поправки расположатся симметрично относительно середины ряда, увеличиваясь к концам его. Удлиннение ряда может быть осуществлено только увеличением сторон, но по базисному условию увеличения сторон не требуется, а потому во второй половине цепи поправки расположатся совершенно симметрично первой половине, но знаки будут обратные первым.

<sup>\*)</sup> Схема и программа государственных триангуляций. Ф. Н. Красовский  
Москва 1928 г.

Допустим, что среди примерно равносторонних треугольников будем иметь треугольник, имеющий острый угол В (треугольники к фиг. 8) и



Фиг. 8.

наличие прежних условий. При одних и тех же поправках к углам равностороннего треугольника и треугольника имеющего острый угол В, эффект продвижения вершины В будет для них различен, именно: он будет тем больше, чем острее угол В, откуда мы можем заключить, что при уравнивании под условием минимума суммы квадратов поправок к углам, именно этот треугольник получит наибольшие поправки. Точно также в треугольнике с номером  $i$ , имеющим большие связующие и короткую промежуточную стороны, при изменении угла С эффект поворота стороны  $S_i$  будет больше, чем в остальных треугольниках, вследствие чего, при наличии указанных условий уравнивания, на угол  $C_i$  треугольника, при всех прочих равных условиях, упадет наибольшая поправка. Обобщая можно сказать, что при уравнивании под указанным условием форма треугольника и его положение относительно доминирующего свободного члена имеют решающее значение на величину поправок.

При условии, когда мы имеем триангуляционный ряд, состоящий из небольшого числа треугольников, и кроме того, когда имеется полная уверенность в исходных и конечных сторонах и пунктах, наложение условия минимума суммы квадратов поправок к углам есть вероятнейшее решение, так как очевидно, что распределение наибольших поправок к острым углам треугольников, соответственным образом расположенных, отвечает вероятности предположения, что именно погрешности в этих углах сыграли решающую роль на образование свободных членов условных уравнений.

Часто ли мы имеем в практике наличие указанных условий, т. е. достоверность исходных и конечных сторон и пунктов и небольшое количество треугольников в ряде? Нет, далеко не часто. Всегда исходные данные несут известные погрешности, а потому расхождение при примыкании рядов есть функция погрешностей в прокладываемом ряде и исходных данных.

Кроме того, при большом количестве треугольников в ряде, имеется полная уверенность в том, что в данном случае налицо возможность суммирования погрешностей и наоборот — их компенсации. Как только мы согласимся с мыслью, что при уравнивании под условием минимума суммы квадратов поправок к углам треугольников ряда наибольшие поправки

получат острые углы, соответствующим образом расположенных треугольников, (что подтверждается соображениями геометрического порядка и просмотром уравненных рядов\*), то уравнивание под условием  $\min_{\text{имит}}^{\text{имит}}$  суммы квадратов поправок к углам рядов, состоящих из значительного количества треугольников или опирающихся на пункты и стороны, несущие в свою очередь известные погрешности, равносильно утверждению, что точность измерения угла зависит от его величины.

Конечным материалом триангуляции являются координаты пунктов длины сторон и азимуты их. На уравненных сторонах триангуляций строятся в свою очередь ряды следующих классов и целиком получают погрешности исходных сторон.

Выше нами указывалось, что поворот от длинной стороны будет эффективней в смысле продвижения ряда, требующегося доминирующим свободным членом условных уравнений. Таким образом относительное изменение стороны  $S_i$  будет значительно более, чем в других сторонах, т. е. логарифмы сторон после уравнивания изменятся весьма неравномерно, что ведет к понижению точности уравниваемой триангуляции и строящихся на ней последующих триангуляций.

На основании вышесказанного приведем здесь вывод формул, дающих возможность уравнивать триангуляции не только под условием минимума суммы квадратов поправок к углам, но и к сторонам и сводить деформацию треугольников ряда к минимуму.

## 8. СПОСОБ ВТОРОЙ—МИНИМУМ ДЕФОРМАЦИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Допустим, как и ранее, что связующие стороны триангуляции получили масштабные и азимутальные поправки, т. е.

$$\begin{array}{ccccccccc} S_1 & & S_2 & \dots & \dots & \dots & S_n \\ m_1 & & m_2 & \dots & \dots & \dots & m_n \\ r_1 & & r_2 & \dots & \dots & \dots & r_n, \end{array}$$

где  $m_k = m_{k-1} + \mu_k$ ,  $r_k = r_{k-1} + \rho$

Выше мы вывели зависимость между масштабными и азимутальными изменениями  $\mu_k$  и  $\rho_k$  связующей стороны и дифференциальными изменениями углов  $d\Delta$ ,  $d\beta$  и  $d\gamma$  (формулы 5).

Кроме того формула (7) дает связь между масштабным изменением промежуточной стороны с теми же изменениями связующей стороны.

\*). Правильность высказанных соображений легче всего проверить просмотром результатов уравнивания рядов за одно какое-либо условие (кроме азимутального). Например, проф. Витковский—Практическая геодезия изд. 1911 г. стр. 540, проф. Красовский—Руководство по высшей геодезии ч. I стр. 282, где приведены данные уравнивания за базисные условия. Из сравнения поправок к связующим углам А и В треугольника мы убеждаемся в том, что всегда наибольшую поправку получает наименьший из связующих углов. Такая закономерность распределения поправок противоречит принципу вероятности и является следствием несовершенства требования  $\min_{\text{имит}}^{\text{имит}}$  суммы квадратов поправок к углам.

Выпишем изменения всех углов и сторон треугольника в функции  $\mu$  и  $\rho$  связующей стороны и добавим еще разность  $\mu - \mu'$ .

	правый	левый	(17)
(A)	$f\mu + p\rho$	$-(f\mu + p\rho)$	
(B)	$-f\mu + p'\rho$	$f\mu - p'\rho$	
(C)	$-\rho$	$+\rho$	
$S_{k-1}$	0	0	
$S_k$	$\mu$	$\mu$	
$S'_k$	$p\mu - f\rho$	$p\mu - f\rho$	
$\mu - \mu'$	$\mu - (p\mu - f\rho)$	$\mu - (p\mu - f\rho)$	

Потребуем при уравнивании минимума суммы квадратов поправок к углам и масштабных изменений сторон, т. е.

$$[(A)^2 + (B)^2 + (C)^2 + \mu^2 + \mu'^2 + (\mu - \mu')^2] = \text{minimum}.$$

Возводя в квадрат выражения (17), по суммированию имеем:

$$\begin{array}{lcl} + 2f^2\mu^2 & + p^2\rho^2 & - 2p'f\mu\rho \\ + 2p^2\mu^2 & + p'^2\rho^2 & - 2pf\mu\rho \\ + 2\mu^2 & + \rho^2 & + 2f\mu\rho \\ - 2p\mu^2 & + 2f^2\rho^2 & \end{array}$$

$$[2(f^2 + p^2 + 1 - p)\mu^2 + (p^2 + p'^2 + 1 + 2f^2)\rho^2 - 2f(p' + p - 1)\mu\rho] = \text{min.}$$

На основании (6)  $p' = 1 - p$ ,

а потому, подставляя значение  $p'$  и сокращая на два, имеем:

$$[(f^2 + p^2 + p')\mu^2 + (f^2 + p^2 + p')\rho^2] = \text{minimum} \quad (18)$$

Введем обозначение

$$P = f^2 + p^2 + p', \quad (19)$$

где  $P$  назовем геометрическим весом треугольника.

Условие минимума деформации треугольников ряда выражается следующим:

$$[P\mu^2 + P\rho^2] = \text{minimum}.$$

Дифференцируя функцию и приравнивая нулю имеем:

$$[P\mu d\mu + P\rho d\rho] = 0 \quad (a)$$

Поступая как и выше, т. е. дифференцируя условные уравнения (11), помножая их на произвольные множители и складывая, имеем:

$$[(aK_1 + cK_3 + dK_4) d\mu + (aK_2 - dK_3 + cK_4) d\rho] = 0 \quad (b)$$

откуда, приравнивая по неопределенности коррелат  $K_1, K_2, K_3, K_4$  коэффициенты у  $d\mu$  и  $d\rho$  в выражениях (a) и (b), и имея ввиду, что  $a = +1$  имеем:

$$P\mu = K_1 + cK_3 + dK_4$$

$$P\rho = K_2 - dK_3 + cK_4$$

или, обозначая

$$\frac{1}{P} = \Lambda; \quad \frac{c}{P} = C; \quad \frac{d}{P} = D \quad (20)$$

имеем выражения искомых  $\mu$  и  $\rho$  через коррелаты:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \Lambda K_1 + CK_3 + DK_4 \\ \rho = \Lambda K_2 - DK_3 + CK_4 \end{array} \right\} \quad (21)$$

Подставляя  $\mu$  и  $\rho$  из (21) в условные уравнения (11), имеем нормальные уравнения коррелат в окончательном виде:

$$\left. \begin{array}{l} [\Lambda] K_1 + 0 K_2 + [C] K_3 + [D] K_4 + v_1 = 0 \\ [\Lambda] K_2 - [D] K_3 + [C] K_4 + v_2 = 0 \\ [cC + dD] K_3 + 0 K_4 + v_3 = 0 \\ [cC + dD] K_4 + v_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

Как мы видим, нормальные уравнения (22) обладают удивительной простотой. В них, кроме свободных членов уравнений, фигурируют всего только 4 цифры

$$[\Lambda], [C], [D] \text{ и } [cC + dD].$$

По решении уравнения (22) получаем коррелаты  $K_1, \dots, K_4$ , подставляя которые в уравнения (21) находим  $\mu$  и  $\rho$  всех связующих сторон, а по ним уже все необходимые данные — или непосредственно поправки к координатам (вычислив предварительно  $m$  и  $r$ ) или поправки к углам, пользуясь формулами (3).

Приведем здесь все основные формулы первого и второго способов. Постоянные треугольников;

$$f = \pm \frac{\sin A \sin B}{\sin C} \left( \begin{array}{l} + \text{для прав. т-ков} \\ - \text{для лев. } \end{array} \right); \quad p = \frac{\sin A \cos B}{\sin C}; \quad p' = 1 - p; \quad \text{контроль } \frac{f}{p} = \operatorname{tg} B.$$

Условные уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n + v_1 = 0 \\ a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n + v_2 = 0 \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + \dots + c_i p_i + \dots + c_l p_l + d_1 p_1 + d_2 p_2 + \dots + d_j p_j + c_1 p_1 + c_2 p_2 + \dots + c_i p_i + v_3 = 0 \\ d_1 p_1 + d_2 p_2 + \dots + d_l p_l + c_1 p_1 + c_2 p_2 + \dots + c_i p_i + v_4 = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{где } a_k = \frac{1}{k}, \\ c_k = |\Delta x|_k^i, \\ d_k = |\Delta y|_k^i, \\ v_k = \dots \end{array}$$

### Способ первый

minimum суммы квадратов поправок к углам

$$\left| \begin{array}{l} F' = 2 f^2 \\ G' = (p^2 + p'^2 + 1) \\ H' = f(p - p') \\ F = \frac{F'}{3P} = +0.67 \\ G = \frac{G'}{3P} \\ H = \frac{H'}{3P} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} A = \frac{1}{P} \\ C = \frac{c}{P} \\ D = \frac{d}{P} \end{array} \quad \begin{array}{l} P = f^2 + p^2 + p' \\ \text{minimum деформации треугольников} \end{array}$$

$$\begin{aligned} p &= GK_1 - HK_2 + (cG + dH)K_3 + (dG - cH)K_4 \\ \rho &= -HK_1 + FK_2 - (df + ch)K_3 + (cf - dh)K_4 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} [G]K_1 - [H]K_2 + [cG + dH]K_3 + [dG - ch]K_4 + v_1 = 0 \\ + [F]K_2 - [df + ch]K_3 + [cf - dh]K_4 + v_2 = 0 \\ + [c^2G + d^2H]K_3 + [d^2H - c^2F]K_4 + v_3 = 0 \\ + [d^2G + c^2F - 2cdH]K_4 + v_4 = 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \mu = AK_1 + CK_3 + DK_4 \\ \rho = AK_2 - DK_3 + CK_4 \\ [A]K_1 + 0.K_2 + [C]K_3 + [D]K_4 + v_1 = 0 \\ + [A]K_2 - [D]K_3 + [C]K_4 + v_2 = 0 \\ + [cC + dD]K_3 + 0.K_4 - v_3 = 0 \\ [cC + dD]K_4 + v_4 = 0 \end{array}$$

$$(C)_k = \mp \frac{\rho_k}{\sin 1''} \quad \text{для прав. тр-ков} \quad m_k = [\mu]_1^k; \quad m'_k = m_{k-1} + \mu'_k$$

$$\text{когда } v_1, v_2, v_3, v_4 \text{ увеличены в } 10^6 \quad r_k = [\rho]_1^k \quad r'_k = r_{k-1} + \rho'_k$$

$$(C_k) = \mp \rho_k \cdot 0.2063; \quad \mu'' = \mu \cdot 0.2063 \quad d(\Delta x) = m \Delta x - r \Delta y$$

$$(A) = f\mu'' - p(C) \quad d(\Delta y) = m \Delta y + r \Delta x$$

$$(B) = - (f\mu + p'(C)) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ где } f \text{ всюду положительно}$$

## 9. ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР УРАВНИВАНИЯ ПОД УСЛОВИЕМ МИНИМАМА ДЕФОРМАЦИИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Приведем здесь обработку того же ряда (стр. 23) пользуясь формулами второго способа.

В табл. 9 приведен подсчет постоянных треугольников  $f$ ,  $r$  и  $r'$ , а также и  $P$ , причем  $f$  для этого способа всегда положительно.

В табл. 10 приведен подсчет условных и нормальных уравнений, причем в графах 2 и 3 выписаны приращения координат по ходовой линии из связующих сторон треугольников ряда.

Графы 4 и 5 являются коэффициентами третьего и четвертого уравнений и подсчитываются простым суммированием приращений, как указано в п. 8 практических указаний.

$S'$  есть сумма коэффициентов  $s$  и  $d$  и служит для контроля.  $\frac{1}{P}$  выписывается из табл. 9.

Помножением  $s$ ,  $d$  и  $S'$  на  $\frac{1}{P}$  получены  $C$ ,  $D$  и  $S$ , причем графа  $S$  служит для контроля, являясь суммой 8 и 9.

Графы 11 и 12 получаются перемножением 4 на 8 и 5 на 9. Если вычисление ведется в две руки, то график 12 и ограничивается составление нормальных уравнений.

Графы 13 и 14 приведены исключительно для контроля 11 и 12, так как

$$[cC + dD] + [2dC] = [S'S].$$

Это же равенство соблюдается и построчно.

Получившиеся нормальные уравнения

$$\begin{aligned} &+ 10.83 K_1 + 0 K_2 - 17.40 K_3 + 487.80 K_4 - 17.50 = 0 \\ &+ 10.83 K_2 - 487.80 K_3 - 17.40 K_4 - 17.36 = 0 \\ &+ 30283 K_3 + 0 K_4 - 2920 = 0 \\ &+ 30283 K_4 - 2380 = 0 \end{aligned}$$

решены по схеме Гаусса, причем и при решении имеются значительные упрощения, так как коэффициенты повторяются.

Таблица 9.  
Вычисление геометрических весов и постоянных треугольников

Номера треугольн.	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{f}{p}$	1.767	3.988	2.055	1.313	1.845	0.921	0.860
$\frac{tg B}{p}$	1.768	3.985	2.058	1.313	1.843	0.921	0.859
f	+ 0.806	+ 0.667	+ 1.528	+ 0.949	+ 0.442	+ 0.650	+ 0.572
lgf	9.906	9.824	0.184	9.977	[9.645	9.812	9.757
sin B	9.940	9.987	9.954	9.901	9.944	9.831	9.814
d sin C	0.018	0.041	0.236	0.094	0.000	0.022	0.007
sin A	9.918	9.796	9.994	9.982	9.701	9.959	9.936
cos B	9.692	9.386	9.641	9.783	9.678	9.867	9.880
lgp	9.657	9.223	9.871	9.859	9.379	9.848	9.823
p	+ 0.455	+ 0.167	+ 0.743	+ 0.723	+ 0.239	+ 0.705	+ 0.665
p'	+ 0.545	+ 0.833	+ 0.257	+ 0.277	+ 0.761	+ 0.295	+ 0.335
p <sup>2</sup>	0.20	0.02	0.54	0.51	0.05	0.50	0.43
f <sup>2</sup>	0.64	0.44	2.31	0.88	0.19	0.42	0.32
P	1.39	1.29	3.10	1.67	1.00	1.21	1.08
A = $\frac{1}{P}$	0.71	0.77	0.32	0.59	1.00	0.83	0.93
8	9	10	11	12	13	14	15
1.525	1.320	2.852	0.746	2.292	1.461	1.184	1.900
1.526	1.319	2.849	0.746	2.294	1.461	1.183	1.899
+ 1.175	+ 0.741	+ 0.867	+ 0.741	+ 0.767	+ 0.683	+ 0.558	+ 0.912
0.070	9.870	9.938	9.870	9.885	9.834	9.747	9.960
9.922	9.901	9.975	9.776	9.962	9.917	9.883	9.947
0.156	0.034	0.071	0.094	0.045	0.021	0.003	0.074
9.992	9.935	9.892	0.000	9.878	9.896	9.861	9.939
9.739	9.781	9.520	9.904	9.602	9.752	9.810	9.668
9.887	9.750	9.483	9.998	9.525	9.669	9.674	9.681
+ 0.771	+ 0.562	+ 0.304	+ 0.996	+ 0.335	+ 0.467	+ 0.472	+ 0.480
+ 0.229	+ 0.438	+ 0.696	+ 0.004	+ 0.665	+ 0.533	+ 0.528	+ 0.520
0.59	0.31	0.09	1.00	0.10	0.22	0.22	0.23
1.36	0.54	0.75	0.54	0.59	0.46	0.31	0.82
2.18	1.29	1.54	1.54	1.36	1.21	1.06	1.57
0.46	0.77	0.65	0.65	0.74	0.83	0.94	0.64

Таблица 10.  
Составление условных уравнений и нормальных уравнений коррелят.

Номер пра- тиков	$\Delta X$		$\Delta Y$		c	d	S'	A = $\frac{1}{P}$	C	D	S	eC	dD	2 dC	SS
	в км	3	2	4											
1	+ 12.96	+	6.49	+ 18.0	+ 76.5	+ 94.5	0.71	+ 12.8	+ 51.4	+ 67.1	+ 230.4	+ 4154.0	+ 1958.4	+ 6311.0	
2	-	-	+ 5.1	+ 70.0	+ 75.1	0.77	+ 3.9	+ 53.9	+ 57.8	+ 19.9	+ 3773.0	+ 516.0	+ 4310.8		
3	+ 6.23	-	8.12	+ 5.1	+ 70.0	+ 75.1	0.32	+ 1.6	+ 22.4	+ 24.0	+ 8.2	+ 1568.0	+ 224.0	+ 1802.4	
4	+ 3.43	+ 11.87	-	1.2	+ 78.2	+ 77.0	0.59	- 8.7	+ 46.1	+ 45.4	+ 0.8	+ 3605.0	- 109.4	+ 3195.8	
5	-	-	*	- 4.6	+ 66.3	+ 61.7	1.00	- 4.6	+ 66.3	+ 61.7	+ 21.2	+ 4396.7	- 610.0	+ 3806.9	
6	+ 5.58	+	7.68	- 4.6	+ 66.3	+ 61.7	0.83	- 3.8	+ 55.0	+ 51.2	+ 17.5	+ 3616.5	- 503.8	+ 3159.0	
7	- 11.31	+	5.41	- 10.2	+ 58.6	+ 48.4	0.93	- 9.5	+ 54.5	+ 45.0	+ 96.9	+ 3193.7	- 1113.4	+ 2178.0	
8	+ 13.97	+	4.72	+ 1.1	+ 53.2	+ 54.3	0.46	+ 0.5	+ 21.5	+ 25.0	+ 0.6	+ 1303.4	+ 53.2	+ 1357.5	
9	- 10.45	+ 12.01	-	- 12.8	+ 48.5	+ 35.7	0.77	- 9.9	+ 37.3	+ 27.5	+ 126.7	+ 1809.0	- 960.2	+ 981.7	
10	-	-	-	- 2.4	+ 36.5	+ 31.1	0.65	- 1.6	+ 23.7	+ 22.2	+ 3.8	+ 865.0	- 116.8	+ 757.0	
11	+ 10.07	+ 19.59	-	- 2.4	+ 36.5	+ 31.1	0.65	- 1.6	+ 23.7	+ 22.2	+ 3.8	+ 865.0	- 116.8	+ 757.0	
12	- 18.15	+ 0.53	-	- 12.1	+ 16.9	+ 4.5	0.71	- 9.2	+ 12.5	+ 3.3	+ 114.1	+ 211.3	- 310.9	+ 11.8	
13	+ 5.70	+ 16.36	-	+ 5.7	+ 16.4	+ 22.1	0.83	+ 4.7	+ 13.6	+ 18.3	+ 26.8	+ 223.0	+ 151.0	+ 401.1	
14	-	-	-	-	-	-	0.91	-	-	-	-	-	-	-	
15	-	-	-	-	-	-	0.64	-	-	-	-	-	-	-	
	+ 18.03	+ 76.54	-	15.6	+ 693.9	+ 678.8	10.83	- 17.4	+ 487.8	+ 470.7	+ 670.7	+ 29612.6	- 905.7	+ 29396.6	

Таблица 11.  
Решение нормальных уравнений.

Лист А.

v	1	2	3	4	S
- 17.50	+ 10.83	-	- 17.40	+ 487.80	+ 463.73
1.20 304 <sub>n</sub>	1.03 463	-	1.24 055 <sub>n</sub>	2.68 824	2.66 627
0.20 841 <sub>n</sub>	-		0.20 592 <sub>n</sub>	1.65 361	1 63 164
+ 1.616	- 17.36	+ 10.83	- 487.80	- 17.40	- 511.73
+ 0.720	1.23 955 <sub>n</sub>	1 03 463	2.68 824 <sub>n</sub>	1.24 055 <sub>n</sub>	2.70 904 <sub>n</sub>
- 8.811	0.20 492 <sub>n</sub>	-	1.65 361 <sub>n</sub>	0.20 592 <sub>n</sub>	1.67 441 <sub>n</sub>
K <sub>1</sub> - 6.475	+ 1.603	- 2 920	+ 30 283	-	+ 26 858
	+ 20.282	- 29	- 28	+ 784	+ 745
	+ 0 311	- 782	- 21 971	- 784	- 23 049
K <sub>2</sub>	+ 22.196	- 3 731	+ 8 284	0	+ 4 554
		3.57 183 <sub>n</sub>	3.91 824	-	3 65 839
		9.65 359 <sub>n</sub>	- 2 380	+ 30 283	8.74 015
K <sub>3</sub>	+ 0.450	+ 0.450	+ 788	- 21 971	+ 28 373
			- 28	- 28	- 20 887
			- 1620	+ 8 284	- 822
lg K <sub>4</sub>	9.29 128	3 20 952 <sub>n</sub>	3.91 824		
		K <sub>4</sub>	+ 0.196		

Таблица 12.

Лист Б.

v	1	2	3	4	S
	-	-	1.24 055 <sub>n</sub>	2.68 824	
			1.45 896	2.89 665 <sub>n</sub>	
			1.44 647	4.34 185	
			2.89 416 <sub>n</sub>	4.31 988	
			2.87 219 <sub>m</sub>		
			2.68 827 <sub>n</sub>	1.24 055 <sub>n</sub>	
			2.89 316	1.44 517	
			4.34 185	1.44 647	
			2.89 416	2.91 496	
			4.36 265		

Таблица 13  
Определение неизвестных через коррелаты

помера тр-ков	A	C	D	AK <sub>1</sub>	CK <sub>3</sub>	DK <sub>4</sub>	$\mu$	AK <sub>2</sub>	-DK <sub>3</sub>	CK <sub>4</sub>	$\rho$	m	r			
1	+ 0.71	+ 12.8	+	54.3	- 4.60	+ 5.76	+ 10.61	+ 11.77	+ 15.76	- 24.45	+ 2.50	- 6.19	+ 11.77	- 6.19		
2	+ 0.77	+ 3.9		53.9	- 4.99	+ 1.76	10.53	7.30	17.09	- 24.27	+ 0.76	- 6.42	19.07	- 12.61		
3	0.32	+ 1.6		22.4	- 2.07	+ 0.72	4.38	3.03	7.10	- 10.08	+ 0.31	- 2.67	22.10	- 15.28		
4	0.59	- 0.7		46.1	- 3.82	- 0.32	9.01	4.87	13.10	- 20.75	- 0.14	- 7.79	26.97	- 24.07		
5	1.00	- 4.6		66.3	- 6.48	- 2.07	12.96	4.41	22.20	- 29.85	- 0.90	- 8.55	31.38	- 31.62		
6	0.83	- 3.8		55.0	- 5.37	- 1.71	10.75	3.67	18.42	- 24.76	- 0.74	- 7.08	35.05	- 38.70		
7	0.93	- 9.5		51.5	- 6.02	- 4.28	10.65	0.35	20.64	- 24.54	- 1.86	- 5.76	35.40	- 44.46		
8	0.46	+ 0.5		21.5	- 2.98	+ 0.22	4.79	2.03	10.21	- 11.03	+ 0.10	- 0.72	37.43	- 45.18		
9	0.77	- 9.9		37.3	- 4.99	- 4.46	7.29	+	2.16	17.09	- 16.79	- 1.93	- 1.63	35.27	- 46.81	
10	0.65	- 1.6		23.7	- 4.21	- 0.68	4.63	-	0.26	14.43	- 10.67	0.26	+ 3.47	35.01	- 43.34	
11	0.65	- 1.6		23.7	- 4.21	- 0.68	4.63	-	0.26	14.43	- 10.67	- 0.26	+ 3.47	34.75	- 39.87	
12	0.74	- 9.2		12.5	- 4.79	- 4.14	2.44	-	6.49	16.42	- 5.62	- 1.80	+ 9.00	28.26	- 30.87	
13	0.83	+ 4.7	+	13.6	- 5.37	+ 2.12	+	2.66	-	0.59	18.42	- 6.12	+ 0.92	+ 13.22	27.67	- 17.65
14	0.94	-		-	- 6.09	-	-	-	-	6.09	20.86	-	-	+ 20.86	21.58	+ 3.21
15	+ 0.64	-		-	- 4.14	-	-	-	-	4.14	+ 14.20	-	-	+ 14.20	+ 17.44	+ 17.41
	+ 10.83	- 17.4	+ 487.8	- 70.12	- 7.70	+ 95.36	+ 17.41	+ 240.28	- 219.70	3.34						

Таблица 14.

## Вычисление поправок к углам треугольников.

Номера треуголь- ников	1	2	3	4	5	6	7
f	+ 0.806	+ 0.667	+ 1.528	- 0.949	+ 0.442	+ 0.650	+ 0.572
p	+ 0.455	+ 0.167	+ 0.743	+ 0.723	+ 0.239	+ 0.705	+ 0.665
p'	+ 0.545	+ 0.833	+ 0.257	+ 0.277	+ 0.761	+ 0.295	+ 0.335
$\mu''$	+ 2.429	+ 1.506	+ 0.630	+ 1.005	+ 0.909	+ 0.755	+ 0.072
$f\mu''$	+ 1.953	+ 1.003	+ 0.961	+ 0.954	+ 0.401	+ 0.491	+ 0.041
p(C)	+ 0.582	- 0.220	- 0.408	+ 1.162	- 0.421	- 1.031	+ 0.791
p'(C)	+ 0.698	- 1.100	- 0.142	+ 0.448	- 1.339	- 0.429	+ 0.399
(A)	+ 1.37	+ 1.22	+ 1.37	- 0.21	+ 0.82	+ 1.52	- 0.75
(B)	- 2.65	+ 0.10	- 0.82	- 1.40	+ 0.94	- 0.06	- 0.44
(C)	+ 1.28	- 1.32	- 0.55	+ 1.61	- 1.76	- 1.46	+ 1.19
8	9	10	11	12	13	14	15
+ 1.175	+ 4.741	+ 0.867	+ 0.741	+ 0.767	+ 0.683	+ 0.558	+ 0.912
+ 0.771	+ 0.562	+ 0.304	+ 0.996	+ 0.335	+ 0.467	+ 0.472	+ 0.480
+ 0.229	+ 0.438	+ 0.696	+ 0.004	+ 0.665	+ 0.533	+ 0.528	+ 0.520
+ 0.420	- 0.444	- 0.052	- 0.052	- 1.339	- 0.124	- 1.255	- 0.855
+ 0.493	- 0.330	- 0.045	- 0.039	- 1.028	- 0.084	- 0.702	- 0.780
- 0.116	+ 0.191	+ 0.216	+ 0.706	- 0.623	+ 1.272	- 2.030	- 1.406
- 0.034	+ 0.149	+ 0.494	+ 0.004	- 1.237	+ 1.458	- 2.270	- 1.524
+ 0.61	- 0.52	- 0.26	- 0.74	- 0.40	- 1.36	+ 1.33	+ 0.63
- 0.46	+ 0.18	- 0.45	+ 0.03	+ 2.26	- 1.37	+ 2.97	+ 2.30
- 0.15	+ 0.34	+ 0.71	+ 0.71	- 1.86	+ 2.73	- 4.30	- 2.93

Таблица 15.

## Вычисление поправок к координатам пунктов.

Номер пункта	$\Delta x$	$\Delta y$	$m$	$r$	$m\Delta x$	$-r\Delta y$	$d(\Delta x)$	$m\Delta y$	$r\Delta x$	$d(\Delta y)$	$\delta_x$	$\delta_y$
1	+ 12.96	+ 6.49	+ 11.77	- 6.19	+ 0.153	+ 0.040	+ 0.193	+ 0.076	- 0.080	- 0.004	+ 0.193	- 0.004
2	+ 0.33	- 9.33	19.07	- 12.61	+ 0.006	- 0.118	- 0.112	- 0.178	- 0.004	- 0.182	0.081	- 0.186
3	+ 6.23	- 8.12	22.10	- 15.28	+ 0.138	- 0.124	+ 0.014	- 0.179	- 0.095	- 0.274	0.207	- 0.275
4	+ 3.43	+ 11.87	26.97	- 23.07	+ 0.093	+ 0.274	+ 0.367	+ 0.320	- 0.079	+ 0.241	0.574	- 0.034
5	+ 6.71	- 2.15	31.38	- 31.62	+ 0.211	- 0.068	+ 0.143	- 0.067	- 0.212	- 0.279	0.717	- 0.313
6	+ 5.58	+ 7.68	35.05	- 38.70	+ 0.196	+ 0.297	+ 0.493	+ 0.269	- 0.216	+ 0.053	1.067	+ 0.019
7	- 11.31	5.47	35.40	- 44.46	- 0.400	0.240	- 0.160	0.191	+ 0.503	+ 0.694	0.907	0.713
8	+ 13.97	4.72	37.43	- 45.18	+ 0.523	0.213	+ 0.736	0.177	- 0.631	- 0.454	1.643	0.259
9	- 10.45	12.01	35.27	- 46.81	- 0.369	0.562	+ 0.193	0.424	+ 0.489	+ 0.913	1.836	1.172
10	+ 12.94	2.08	35.01	- 43.34	+ 0.453	0.090	+ 0.543	0.073	- 0.561	- 0.488	2.379	0.684
11	+ 10.07	19.59	34.75	- 39.87	+ 0.350	0.781	+ 1.131	0.681	- 0.402	+ 0.279	2.967	1.451
12	- 18.15	0.53	28.26	- 30.87	- 0.513	0.016	- 0.497	0.015	+ 0.560	+ 0.575	2.470	2.026
13	+ 5.70	16.36	27.67	- 17.65	+ 0.158	+ 0.289	+ 0.447	0.457	- 0.101	+ 0.356	2.917	2.382
14	- 16.07	36.47	21.58	+ 3.21	- 0.347	- 0.117	- 0.464	0.787	- 0.052	+ 0.735	2.453	3.117
15	- 5.47	+ 15.23	+ 17.44	- 0.095	- 0.265	- 0.360	+ 0.266	- 0.095	+ 0.171	+ 2.557	+ 2.553	+ 2.382
											+ 2.917	

Таблица 16.

Номера тре- угольников	Наименование вершин тре- угольников	Поправки углов по методам				Поправки к логарифмам сторон в 7 знаке по методам			
		Автора		Британ.	Натт'a	Спос. первый	Спос. второй	Британ.	Натт'a
		Британ.	Натт'a						
1	Кумыска . . .	-2°57'	-2°63'	-2.55	-2.65	0	0	0	0
	Васильевка . . .	+1.26	+1.09	+1.27	+1.28	+ 44	+ 36	+ 44	+ 45
	Растяпино . . .	+1.31	+1.54	+1.28	+1.37	49	45	48	51
2	Орловка . . .	-0.31	-1.58	-0.29	+0.10				
	Кумыска . . .	-1.75	+0.81	-1.74	-1.32	34	70	34	38
	Васильевка . . .	+2.06	+0.77	+2.03	+1.22	105	82	103	83
3	Мар. Кар. . .	+0.01	-4.21	+0.03	-0.82				
	Кумыска . . .	-1.05	-0.44	-1.06	-0.54	74	109	72	76
	Орловка . . .	+1.04	+4.66	+1.03	+1.37	111	146	107	96
4	Пруд Кар. . .	-1.68	-1.88	-1.64	-1.40				
	Мар. Кар. . .	+2.10	+7.09	+2.09	+1.61	169	287	166	144
	Кумыска . . .	-0.42	-5.21	-0.45	-0.21	113	138	131	117
5	Соколовка . . .	+0.16	+0.26	+0.17	+0.94				
	Пруд Кар. . .	-1.36	-0.61	-1.33	-1.76	130	135	128	106
	Мар. Кар. . .	+1.20	+0.35	+1.16	+0.82	175	201	171	136
6	Стеклодзаз . . .	+0.18	+0.24	+0.20	-0.06				
	Пруд Кар. . .	-1.07	-0.54	-1.07	-1.46	164	187	159	128
	Соколовка . . .	+0.89	+0.30	+0.87	+1.52	179	135	175	152
7	Муханиха . . .	-0.02	+0.23	-0.01	-0.44				
	Стеклодзаз . . .	+0.69	+0.29	+0.68	+1.19	182	139	178	168
	Пруд Кар. . .	-0.67	-0.52	-0.67	-0.75	171	104	167	154
8	Сверликов . . .	-0.24	-0.29	-0.24	-0.46				
	Муханиха . . .	-0.05	-0.03	-0.05	-0.15	173	115	169	157
	Стеклодзаз . . .	+0.29	+0.32	+0.29	+0.61	175	121	171	163
9	Корякина . . .	+0.62	-0.36	+0.63	+0.18				
	Сверликова . . .	+0.07	+0.47	+0.05	+0.34	168	148	162	163
	Муханиха . . .	-0.69	-0.11	-0.68	-0.52	157	136	153	153
10	Бобровка . . .	-0.32	-0.66	-0.35	-0.45				
	Корякина . . .	+0.98	+1.49	+0.96	+0.71	174	153	168	166
	Сверликов . . .	-0.66	-0.83	-0.61	-0.26	148	127	145	152
11	Растяпинск . . .	-0.20	-0.51	-0.25	+0.03				
	Карякина . . .	+0.80	+1.22	+0.81	+0.71	169	134	164	162
	Бобровка . . .	-0.60	-0.71	-0.56	-0.74	154	136	152	151
12	Евтеева . . .	+2.16	+1.05	+2.22	+2.26				
	Растяпинск . . .	-1.76	-0.56	-1.81	-1.86	116	131	114	112
	Корякина . . .	-0.40	-0.49	-0.32	-0.40	127	155	126	123
13	Пигари . . .	-1.16	-1.36	-1.22	-1.37				
	Евтеева . . .	+2.49	+3.49	+2.47	+2.73	161	206	161	161
	Растяпинск . . .	-1.33	-2.13	-1.25	-1.36	122	115	123	120
14	Сияя Гора . . .	+2.82	+2.49	+2.75	+2.97				
	Пигари . . .	-3.44	-3.07	-3.45	-4.30	64	94	67	57
	Евтеева . . .	+0.62	+0.58	+0.70	+1.33	84	50	88	94
15	Нов. Андреев . . .	+2.40	+2.14	+2.35	+2.30				
	Пигари . . .	-3.46	-3.11	-3.46	-2.93	11	1	16	29
	Сияя Гора . . .	+1.06	+0.97	+1.11	+0.63	+ 71	+ 70	+ 76	+ 76

$$[(\ )^2] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & 94 & 194 & 94 & 97 \\ \hline \end{array}$$

Решение приведено в табл. 11 и 12. По найденным коррелатам вычислены поправки  $\mu$  и  $\rho$  к связующим сторонам (табл. 13) и по ним обычным для первого способа порядком поправки к углам (табл. 14). Пользуясь подсчитанными в табл. 15 масштабными и азимутальными поправками к связующим сторонам, подсчитаны поправки к координатам всех пунктов (табл. 15).

Приведем здесь сводную таблицу, поправок к углам и логарифмам сторон по методам—Британскому, Hatt'a и автора (Табл. 16).

Поправки для методов Британского и Hatt'a заимствованы из статьи В. Кобзарь (журнал Геодезист, № 3 за 1929 г.). Из рассмотрения табл. 16 следует, что первый способ автора дает совершенно совпадающее решение с Британским методом.

Сумма квадратов поправок, полученная по второму способу автора, выведенному из условия минимума деформации треугольников ряда, практически равна такой же сумме, полученной по Британскому методу. В то же время равномерность распределения поправок к логарифмам в последнем значительно уступает результатом уравнивания по второму способу автора. Сумма квадратов поправок по методам приведена в таблице.

Наименование методов	Сумма квадратов поправок	
	К углам	К сторонам в 7-м знаке логарифма
Британский . . . . .	94	45000
Автора 1 . . . . .	94	45000
» 2 . . . . .	97	34000

## 10. ВЫВОДЫ.

Допустим, что мы имеем ряд, состоящий из равносторонних треугольников, т. е.

$$A = B = C = 60^\circ.$$

$$p = \frac{\sin A \cos B}{\sin C}$$

Так как  $\sin A = \sin C$ , то по сокращении имеем;

$$p = \cos B = 0.50 \quad p' = 0.50$$

$$f^2 = \frac{\sin^2 A \sin^2 B}{\sin^2 C} = \sin^2 B = 0.75.$$

Подсчитаем при этих значениях  $p$ ,  $f^2$  и  $p'$  величины  $G$  и  $H$  для уравнивания по первому способу (формулы 12, 14).

$$G' = (p^2 + p'^2 + 1) = 1.50$$

$$H' = f(p - p') = 0$$

$$3f^2 = 2.25,$$

а потому

$$G = F = +0.67.$$

Заменяя в формулах для  $\mu$  и  $\rho$  G через F и имея в виду, что для данного случая  $H = 0$  имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = FK_1 + cFK_3 + dFK_4 \\ \rho = +FK_2 - dFK_3 + cFK_4 \end{array} \right\} \quad (a)$$

В обозначениях второго способа

$$\left. \begin{array}{l} \mu = AK_1 + CK_3 + DK_4 \\ \rho = AK_2 - DK_3 + CK_4 \end{array} \right\} \quad (b)$$

Не трудно показать, что коэффициенты при коррелатах для данного случая одинаковы. В самом деле, во втором способе

$$A = \frac{1}{P}; C = \frac{c}{P}; D = \frac{d}{P}, \text{ где } P = f^2 + p^2 + p' = 1.50,$$

$$\text{откуда } F = \frac{1}{P} = +0.67; cF = c \frac{1}{P} = C; dF = d \frac{1}{P} = D.$$

Подставляя формулы (b) в условные уравнения, или, что все равно, производя соответствующие замены в нормальных уравнениях первого способа и имея в виду, что все члены, содержащие H, будут равны нулю, получим нормальные уравнения коррелат:

$$\begin{aligned} [A] K_1 + OK_2 + [C] K_3 + [D] K_4 + v_1 &= 0 \\ + [A] K_2 - [D] K_3 + [C] K_4 + v_2 &= 0 \\ + [cC + dD] K_3 + OK_4 + v_3 &= 0 \\ + [cC + dD] K_4 + v_4 &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует весьма важное заключение, что результаты уравнения под условием минимума суммы квадратов поправок к углам и под условием минимума деформации для ряда, состоящего из равносторонних треугольников, совпадают.

Легко догадаться, что это так и должно быть, так как в данном случае в ряде нет исключительных по величине углов и сторон.

То, что формулы первого способа для ряда, состоящего из равносторонних треугольников, приводятся к формулам минимума деформации ряда, указывает на весьма важное обстоятельство, что формулы уравнения под условием минимума деформации треугольников ряда дают решение не зависящее от формы треугольников. Таким образом способ второй автора ослабляет влияние острых углов в триангуляции, за счет изменения которых (главным образом) происходит уравнивание под условием minimum'a суммы квадратов поправок к углам. Сравнивая поправки второго способа автора и Британского (табл. 16), и обращая внимание

на наиболее разничающиеся между собою поправки, мы убеждаемся в правильности наших заключений, именно: всегда поправки острых углов во втором способе автора по величине менее таковых же, полученных Британским приемом. Для больших углов наоборот—поправки второго способа больше поправок полученных Британским приемом.

Резюмируя вышесказанное, мы находим, что способ, дающий минимум суммы квадратов поправок к углам, должен применяться при наличии следующих условий:

1. Ряд состоит из небольшого числа треугольников, по форме близких к равносторонним.

2. Исходные и примычные данные заведомо точны.

Во всех остальных случаях должно применять способ второй автора, дающий минимум деформации треугольников ряда.

Кроме того, надо заметить, что механизм второго способа значительно проще первого и занимает не более одной трети времени, потребного на уравнивание по первому способу, т. е. около 20 минут на треугольник, включая работу по вычислению окончательных поправок к координатам пунктов.

Ходовая линия по указанному в п. 8 практических указаний принципу для обоих способов может быть проведена только одна, что устраивает иногда вредную субъективность выбора.

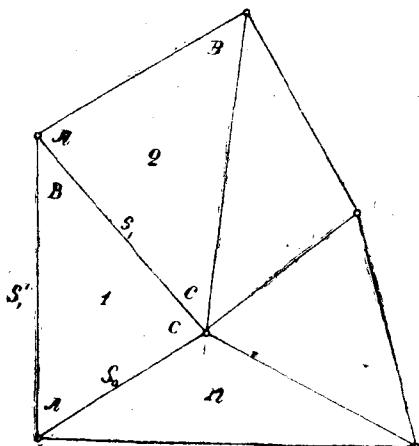
## 11. УРАВНИВАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.

Среди различных видов триангуляций довольно часто, особенно в рудничных триангуляциях, встречается система треугольников, одной из

вершин которых является общая для всех треугольников точка, расположенная в центре. Такая система называется **центральной**. Допустим, что имеем центральную систему, изображенную на фиг. 9, состоящую из  $n$  треугольников. Обозначим связующие стороны треугольников через  $S_k$  промежуточные через  $S'_k$ , и углы против исходной стороны треугольников через  $B$ , против стороны продолжения через  $A$  и промежуточные через  $C$ . Положим, что в системе наблюдались углы, а не направления, и пусть треугольники имели погрешности  $v_1'', v_2'' \dots v_n''$ ; тогда, придав к углам поправки

равные  $-\frac{1}{3}v''_k$  и решив от исходной

стороны  $S_0$  все стороны, мы, вообще говоря, проходя по всем треугольни-



кам системы, не получим исходного логарифма стороны  $S_o$ . Пусть это расхождение будет  $\Delta \lg S = \lg S_n - \lg S_o$ .

Сумма углов  $C$  при центральной вершине, очевидно, должна равняться  $360^\circ$ . Допустим, что

$$\Sigma C = 360^\circ = v_2'',$$

уравнивание в данном случае ограничивается, очевидно, двумя требованиями, чтобы стороны и углы треугольников получили такие поправки, результатом которых конечная сторона треугольника  $S_n$  была бы равна  $S_o$  и  $\Sigma C = 360 = 0$ .

На основании (9) условные уравнения напишутся в весьма простом виде:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + v_1 = 0 \\ \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n + v_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (a)$$

Допустим, что мы ищем решения под условием минимума суммы квадратов поправок к углам, следовательно:

$$[(A)^2 + (B)^2 + (C)^2] = \text{minimum}.$$

На основании (13) условие минимума функции напишется в виде:

$$[F'\mu + H'\rho] d\mu + [G'\rho + H'\mu] d\rho = 0,$$

откуда, дифференцируя уравнения (а), помножая их на коррелаты  $K_1$  и  $K_2$ , поступая также, как в первом способе (стр. 12, 13) и имея ввиду, что третьего и четвертого уравнений в центральной системе нет, формулы для  $\mu$  и  $\rho$  напишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = GK_1 - HK_2 \\ \rho = -HK_1 + FK_2 \end{array} \right\} \quad (23)$$

После подстановки  $\mu$  и  $\rho$  в условные уравнения (а) имеем нормальные уравнения коррелат в виде:

$$\left. \begin{array}{l} [G]K_1 - [H]K_2 + v_1 = 0 \\ -[H]K_1 + [F]K_2 + v_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (24)$$

Решая их находим значения коррелат

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = -\frac{[F]v_1 + [H]v_2}{[F][G] - [H]^2} \\ K_2 = -\frac{[H]v_1 + [G]v_2}{[F][G] - [H]^2} \end{array} \right\} \quad (25)$$

После этого, подставляя значения коррелат  $K_1$ ,  $K_2$  в уравнения (23), находим  $\mu$  и  $\rho$  всех связующих сторон треугольников и, суммируя их (формула 8), находим масштабные и азимутальные поправки всех сторон. Затем имея ввиду, что

$$(A) = f\mu - p(C) \quad \text{где } (C) = \pm 0,2063 \rho_k \\ (B) = -(f\mu + p'(C)),$$

получим поправки к углам треугольников, или пользуясь формулами (10), поправки к координатам вершин системы.

Применим к центральной системе принцип уравнивания под условием минимума деформации ряда. Имеем формулы (19) (20):

$$A = \frac{a}{P} = \frac{1}{P} \\ D = \frac{d}{P} \\ C = \frac{c}{P} \\ \text{где } P = f^2 + p^2 + p'.$$

Отбрасывая в выражениях  $\mu$  и  $\rho$  (формулы 21) члены, содержащие коррелаты  $K_3$  и  $K_4$ , так как в центральную систему входят только два уравнения, имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \mu_k = \frac{1}{P_k} K_1 \\ \rho_k = \frac{1}{P_k} K_2 \end{array} \right\} \quad (26)$$

или, подставляя в условные уравнения (9), имеем:

$$\left[ \frac{1}{P} \right] K_1 + v_1 = 0 \\ \left[ \frac{1}{P} \right] K_2 + v_2 = 0,$$

откуда имеем выражения для коррелат:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = - \left[ \frac{v_1}{\frac{1}{P}} \right] \\ K_2 = - \left[ \frac{v_2}{\frac{1}{P}} \right] \end{array} \right\} \quad (27)$$

Применяя формулы (26), (8) и (10), получим поправки к координатам пунктов, или по формулам (3) поправки к углам треугольников.

Приведем порядок действий по уравниванию центральной системы, пользуясь формулами первого и второго способов автора.

Для первого способа.

1. Приводятся все углы треугольников к плоским путем простого деления невязки в треугольнике на 3 равные части.

2. Производится решение сторон, причем определяется

$$\Delta \lg S = \lg S_n - \lg S_0.$$

3. Определяется свободный член первого уравнения, равный

$$v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M}$$

4. Определяется свободный член условия горизонта

$$v'_2 = \Sigma C - 360^\circ; v_2 = v'_2 \sin 1''.$$

Примечание 1. Для удобства полезно  $v_1$  и  $v_2$  увеличить в  $10^6$  раз.

Примечание 2. В том случае, когда в триангуляции производятся наблюдения направлений, а не углов, в условии горизонта  $v_2 = 0$ .

5. Подсчитываются постоянные треугольников  $f$ ,  $p$  и  $p'$  и по ним величины  $G$ ,  $H$ , причем  $[F]$ , очевидно, равно  $+0.67 n$ , где  $n$  количество треугольников в системе.

Если нумерация треугольников идет по движению часовой стрелки, то все  $f$  имеют знак минус, как лежащие влево по ходу от центральной точки.

6. Пользуясь величинами  $[F]$ ,  $[G]$ ,  $[H]$  и  $[H]^2$ , решают коррелаты  $K_1$  и  $K_2$  формулы (25).

7. Через коррелаты  $K_1$  и  $K_2$  решаются неизвестные  $\mu$  и  $\rho$  и по ним, пользуясь формулами (8),  $m$  и  $r$  всех связующих сторон треугольников.

8. Определяются поправки ко всем углам треугольников путем умножения  $\mu$  и  $\rho$  на 0.2063, при этом очевидно, что при нумерации треугольников, идущей по ходу часовой стрелки

$$(C_k) = +\rho_k 0.2063$$

$$(A) = f\mu'' - p (C)$$

$$(B) = - (f\mu'' + p' (C))$$

9. Умножением  $m_k$  на  $\lg 10 e = 4.3429$  получим поправки к логарифмам сторон в седьмом знаке.

Примечание: Множители 0.2063 и 4.3429 приведены для случая, когда свободные члены уравнений увеличены в  $10^6$  раз.

10. Если вычисление ведется в плоских координатах или координатах Гаусса-Крюгера, то вычисляют поправки к координатам, пользуясь формулами (10).

Примечание: В том случае, когда нет нужды в поправках к углам треугольников и к логарифмам сторон, пункты 8 и 9 очевидно можно опустить и сразу решать поправки к координатам пунктов.

Для способа второго—минимум деформации треугольников порядок действий остается такой же, с той разницей, что по подсчете постоянных треугольников  $f$ ,  $p$  и  $P$  вычисляются величины

$$P_k = f_k^2 + p_k^2 + p_k' \text{ и } \frac{1}{P}$$

Формулы для подсчета коррелат имеют весьма простой вид

$$K_1 = -\frac{v_1}{\left[ \frac{1}{P} \right]}$$

$$K_2 = -\frac{v_2}{\left[ \frac{1}{P} \right]}$$

В остальном вычисление идет также, как и в выше приведенном способе (п. п. 7, 8, 9 и 10).

Для лучшего уяснения механизма уравнивания приведем пример обработки центральной системы (фиг. 10), состоящей из 6 треугольников.

В табл. 19 даны приведенные и плоские углы треугольников и поправки к углам и логарифмам, полученные при уравнивании системы по способу, приведенному в книге „Практическая Геодезия“ Витковского (стр. 545), откуда и заимствованы углы и поправки.

Обработка первым способом метода автора приведена в табл. 17. Свободные члены условных уравнений получились:

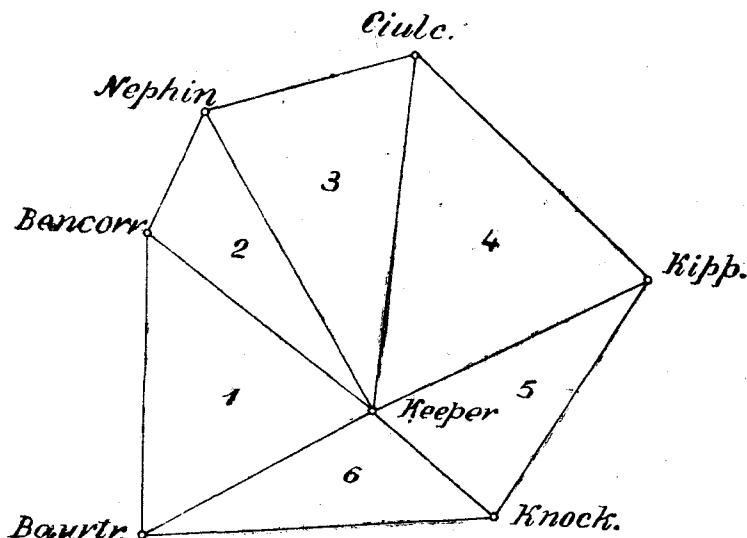
$\Delta \lg S = + 61.4$	$v_2'' = \Sigma C - 360^\circ = -0''17$
$\lg 61.4 \quad 1.78\ 817$	$\lg v_2'' \quad 9.23\ 045_n$
$\frac{10^6}{10^7 M} \quad 9.36\ 222$	$10^6 \sin 1'' \quad 0.68\ 557$
$\lg v_1 \quad 1.15\ 039$	$\lg v_2 \quad 9.91\ 602_n$
$v_1 = + 14.13$	$v_2 = -0.82$

а необходимые суммы

$$[F] = +0.67n \quad [H] = -0.17$$

$$[G] = +8.77 \quad [H]^2 = +0.02$$

По ним найдены коррелаты  $K_1 = -1.615$  и  $K_2 = +0.271$ , а затем  $\mu$  и  $\rho$  всех связующих сторон треугольников.



Фиг. 10.

Поправки к углам треугольников и к логарифмам сторон приведены в табл. 19. Из сравнения старого способа и первого способа автора явствует совершенное совпадение обоих результатов, что и понятно, так как в основу обоих методов положен принцип минимума суммы квадратов поправок к углам.

Применим к указанному примеру формулы второго способа автора.

Решение приведено в табл. 18. Очевидно, разница между первым и вторым способом заключается лишь в том, что для первого способа подсчитываются  $G$  и  $H$ , а для второго  $P$ ; для второго способа  $f_k$  всегда положительно. Коррелаты получились:  $K_1 = -3.613$  и  $K_2 = +0.210$ .

Необходимо помнить, что при подсчете свободных членов  $v_1$  и  $v_2$  увеличены в миллион раз, а потому при определении по  $m$  и  $\chi$  сторон поправок к логарифмам в седьмом знаке и поправок к углам, получившееся значение от умножения  $m_k$  на  $10^7 M$  и от деления  $\rho_k$  на  $\sin 1'$  надо уменьшить в миллион раз, или

$$\Delta \lg S = m_k \cdot 4.3429$$

$$(C) = \rho_k \cdot 0.2063$$

Таблица 17.

## Уравнивание центральной системы (способ первый).

Номера треуголь- ников	1	2	3	4	5	6	
$\frac{f}{p}$	1.292	1.408	2.519	2.641	6.744	0.487	
$\operatorname{tg} B$	1.292	1.409	2.521	2.643	6.744	0.487	
$3f^2$	+ 1.53	+ 12.60	+ 6.39	+ 2.19	+ 0.84	+ 0.36	
$f^2$	+ 0.51	+ 4.20	+ 2.13	+ 0.73	+ 0.28	+ 0.12	
$f$	- 0.725	- 2.051	- 1.459	- 0.861	- 0.526	- 0.348	
$\lg f$	9.860	9.312	0.164	9.935	9.721	9.542	
$\sin B$	9.898	9.911	9.968	9.971	9.995	9.641	
$\Delta \sin C$	0.030	0.412	0.215	0.068	0.031	0.011	
$\sin A$	9.932	9.989	9.981	9.896	9.695	9.890	
$\cos B$	9.787	9.763	9.567	9.549	9.166	9.954	
$\lg p$	9.749	0.164	9.763	9.513	8.892	9.855	
$p$	+ 0.561	+ 1.458	+ 0.579	+ 0.326	+ 0.078	+ 0.717	
$p'$	+ 0.439	- 0.458	+ 0.421	+ 0.674	+ 0.922	+ 0.283	
$p^2$	+ 0.31	+ 2.13	+ 0.33	+ 0.10	+ 0.00	+ 0.51	
$p'^2$	+ 0.19	+ 0.21	+ 0.17	+ 0.44	+ 0.84	+ 0.07	
$G'$	+ 1.50	+ 3.34	+ 1.50	+ 1.51	+ 1.84	+ 1.58	
$p - p'$	+ 0.12	+ 1.92	+ 0.16	- 0.34	- 0.84	+ 0.44	
$-H'$	- 0.99	- 3.94	- 0.23	+ 0.29	+ 0.45	- 0.15	
$G$	+ 0.98	+ 0.27	+ 0.24	+ 0.70	+ 2.19	+ 4.39	+ 8.77
$H$	- 0.06	- 0.32	- 0.04	+ 0.13	+ 0.54	- 0.42	- 0.17
$GK_1$	- 1.58	- 0.44	- 0.39	- 1.13	- 3.54	- 7.09	
$-HK_2$	+ 0.02	+ 0.09	+ 0.01	- 0.04	- 0.15	+ 0.11	
$\mu$	- 1.56	- 1.35	- 1.38	- 1.17	- 3.69	- 6.98	- 14.13
$-HK_1$	- 0.10	- 0.52	- 0.06	+ 0.21	+ 0.87	- 0.68	
$+FK_2$	+ 0.18	+ 0.18	+ 0.18	+ 0.18	+ 0.18	+ 0.18	
$\rho$	+ 0.08	- 0.34	+ 0.12	+ 0.39	+ 1.05	- 0.50	+ 0.80
$\mu''$	- 0.322	- 0.072	- 0.078	- 0.241	- 0.761	- 1.440	
$f\mu''$	- 0.233	- 0.148	- 0.114	- 0.207	- 0.400	- 0.503	
$p(C)$	+ 0.011	- 0.102	+ 0.012	+ 0.026	+ 0.017	- 0.072	
$p'(C)$	+ 0.009	+ 0.032	+ 0.008	+ 0.054	+ 0.203	- 0.028	
(A)	- 0.24	- 0.05	- 0.13	- 0.23	- 0.42	- 0.43	
(B)	+ 0.22	+ 0.12	+ 0.11	+ 0.15	+ 0.20	+ 0.53	
(C)	+ 0.02	- 0.07	+ 0.02	+ 0.08	+ 0.22	- 0.10	

Таблица 18.  
Уравнивание центральной системы (способ второй).

Номера треугольников	1	2	3	4	5	6
$\frac{f}{p}$	1.292	1.408	2.519	2.641	6.744	0.487
$\text{tg } B$	1.292	1.409	2.521	2.643	6.744	0.487
$f$	+ 0.725	+ 2.054	+ 1.459	+ 0.861	+ 0.526	+ 0.349
$\lg f$	9.860	0.312	0.164	9.935	9.721	9.542
$\sin B$	9.898	9.911	9.968	9.971	9.995	6.641
$d. \sin C$	0.030	0.412	0.215	0.068	0.031	0.011
$\sin A$	9.932	9.989	9.981	9.896	9.695	9.890
$\cos B$	9.787	9.763	9.566	9.549	9.166	9.954
$\lg p$	9.749	0.164	9.762	9.513	8.892	9.855
$p$	+ 0.561	+ 1.459	+ 0.579	+ 0.326	+ 0.078	+ 0.717
$p'$	+ 0.44	- 0.46	+ 0.42	+ 0.67	+ 0.92	+ 0.28
$p^2$	+ 0.31	+ 2.13	+ 0.33	+ 0.10	0.00	+ 0.51
$f^2$	+ 0.51	+ 4.20	+ 2.13	+ 0.73	+ 0.28	+ 0.12
$P$	+ 1.26	+ 5.87	+ 2.88	+ 1.50	+ 1.20	+ 0.91
$\frac{1}{P}$	+ 0.79	+ 0.17	+ 0.35	+ 0.67	+ 0.83	+ 1.10
$\mu$	- 2.85	- 0.61	- 1.26	- 2.42	- 3.00	- 3.97
$\rho$	+ 0.17	+ 0.04	+ 0.07	+ 0.14	+ 0.17	+ 0.23
$m$	- 2.85	- 3.46	- 4.72	- 7.14	-10.14	-14.11
$r$	+ 0.17	+ 0.21	+ 0.28	+ 0.42	+ 0.59	+ 0.82
$\mu''$	- 0.588	- 0.126	- 0.260	- 0.499	- 0.690	- 0.819
$f\mu''$	- 0.426	- 0.259	- 0.379	- 0.430	- 0.326	- 0.286
$pC$	+ 0.022	+ 0.015	+ 0.006	+ 0.010	+ 0.003	+ 0.036
$p''C$	+ 0.018	- 0.005	+ 0.004	+ 0.020	+ 0.037	+ 0.014
(A)	- 0''.45	- 0''.27	- 0''.38	- 0''.44	- 0''.33	- 0''.32
(B)	+ 0.41	+ 0.26	+ 0.37	+ 0.41	+ 0.29	+ 0.27
(C)	+ 0.04	+ 0.01	+ 0.01	+ 0.03	+ 0.04	+ 0.05

Таблица 19.

номер по порядку	Наименование вершин	Приведенные углы	Плоские углы	Поправки к углам по методам			Поправки к логарифмам сторон по методу		
				Стар.	Автора сп.пер.	Автора сп. вт.	Стар.	Автора сп.пер.	Автора сп. вт.
1	Bencorr	52°16'22".32	10°10'	+0.22	+0.22	+0.41			
	Keeper	68 57 68. 90	56. 67	+0.02	+0.02	+0.04	- 3.6	- 3.6	- 6.4
	Baurtreg.	58 45 65. 46	53. 23	-0.24	-0.24	-0.45	- 6.8	- 6.8	-12.4
	$\varepsilon'' = 38''.36$	180 0 36. 68							
2	Nephin	54 38 27. 77	22. 15	+0.12	+0.12	+0.26			
	Keeper	22 47 43. 81	38. 20	-0.07	-0.07	+0.01	-12.0	-12.0	-15.9
	Bencorr	102 33 65. 26	59. 65	-0.05	-0.05	-0.27	- 8.3	- 8.3	-15.0
	$\varepsilon = 20''.60$	180 00 16. 84							
3	Cuilcagh	68 21 60. 37	46. 40	+0.10	+0.11	+0.37			
	Keeper	37 32 47. 29	33. 31	+0.03	+0.02	+0.01	- 8.5	- 8.5	-17.8
	Nephin	74 5 54. 27	40. 29	-0.13	-0.13	-0.38	- 9.9	- 9.9	-20.5
	$\varepsilon = 40''.12$	180 0 41. 93							
4	Kippure	69 17 33".41	17. 24	+0.15	+0.16	+0.41			
	Keeper	58 47 62. 80	46. 63	+0.08	+0.08	+0.03	-10.1	-10.1	-23.4
	Cuilcagh	51 55 12. 30	56. 13	+0.23	-0.24	-0.44	-15.0	-15.0	-36.0
	$\varepsilon = 49''.03$	180 0 48. 51							
5	Knockan.	81 34 25. 36	15. 48	+0.21	+0.20	+0.29			
	Keeper	68 45 22. 28	12. 30	+0.21	+0.22	+0.04	-13.9	-13.9	-31.6
	Kippure	29 40 42. 02	32. 13	-0.42	-0.42	-0.33	-31.1	-31.1	-43.9
	$\varepsilon = 22''.50$	180 0 29. 66							
6	Baurtreg.	25 57 17. 09	10. 96	+0.53	+0.53	+0.27			
	Keeper	103 7 54. 92	48. 80	-10.0	-0.10	+0.05	-53.4	-53.4	-56.0
	Knockan.	50 55 6. 36	0. 24	-0.43	-0.43	-0.32	-61.4	-61.4	-61.3
	$\varepsilon = 20''.88$	180 0 18. 37							

Если вычисление триангуляции ведется в координатах Гаусса-Крюгера или в плоских координатах, то поправки к ним легко получаются при помощи арифмометра, пользуясь формулами (10). Время, потребное для уравнивания центральной системы в 6 треугольников—1 час 30 минут по первому способу и 1 час по второму.

## 12. УРАВНИВАНИЕ НАБЛЮДЕННЫХ УГЛОВ\*) ТРЕУГОЛЬНИКОВ БЕЗ НАЛОЖЕНИЯ УСЛОВИЙ ФИГУР.

Выше нами выведены формулы для первого и второго способов в предположении, что углы треугольников приведены к  $180^\circ$ . Дифференциальная зависимость между изменениями стороны продолжения всякого треугольника  $\mu$  и  $\rho$  с изменениями углов и промежуточной стороны  $\mu'$  для этого случая определяется формулами (5) и (7).

Разберем теперь вопрос уравнивания триангуляции за те или иные условия, не прибегая к приведению суммы углов к  $180^\circ$  и не накладывая так называемых условий фигур.

Применим наши рассуждения к центральной системе, как наиболее простой. Из предыдущего мы знаем, что уравнивание центральной системы заключается в удовлетворении условий (формулы 9)

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n + v_1 = 0$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n + v_2 = 0.$$

Положим, что центральная система состоит из  $n$  треугольников (фиг. 9). Обозначим ошибки треугольников системы через  $v''_1, \dots, v''_2, v''_n$ , а наблюденные углы через  $A', B'$  и  $C'$ .

Найдем зависимость между изменениями  $\mu_k$  и  $\rho_k$  стороны треугольника с номером  $k$ , имеющего невязку в углах  $v''_k$  с изменениями углов треугольника.

Подсчитаем свободный член первого и второго условного уравнения по углам  $A', B'$  и  $C'$ , не приведенным к  $180^\circ$ , тогда

$$m_n + v_1 = 0; m_n + \lg \frac{\sin A'_1 \sin A'_2}{\sin B'_1 \sin B'_2} \frac{\sin A'_n}{\sin B'_n} \frac{1}{10^7 M} = 0$$

Допустим, что при уравнивании углы  $A', B'$  и  $C'$  получили поправки  $dA_k, dB_k$  и  $dC_k$ .

На основании выводов (стр. 6) имеем:

$$\operatorname{ctg} A' dA - \operatorname{ctg} B' dB = \mu \quad (a)$$

Кроме того, при всяких значениях  $\mu_k$  и  $\rho_k$  необходимо, чтобы

$$dA_k + dB_k + dC_k = -v''_k \quad (b)$$

Решим уравнения (a) и (b) относительно  $dA$  и  $dB$ , для чего уравнивая коэффициенты при  $dB$  и складывая, имеем:

$$(\operatorname{ctg} A' + \operatorname{ctg} B') dA = \mu - (v + dC) \operatorname{ctg} B.$$

\*) Предполагаются наблюденные и приведенные к центрам углы.

Уравнивая коэффициенты в уравнениях при  $dA$  и вычитая из уравнения (b) уравнение (a) имеем:

$$(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) dB = -\mu - (v + dC) \operatorname{ctg} A$$

или заменяя  $dA$  через (A),  $dB$  через (B) и  $dC$  через (C) имеем:

$$\left. \begin{array}{l} (A) = \frac{\mu - (v + (C)) \operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \\ (B) = -\frac{\mu + (v + (C)) \operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} \end{array} \right\} \quad (c)$$

Преобразуем знаменатель в формулах (c)

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$$

или, согласно обозначений в формулах (3)

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{1}{f},$$

а потому, подставляя полученное значение знаменателя в выражения (c), имеем окончательно:

$$\left. \begin{array}{l} (A)_k = \mu_k f_k - p_k (v''_k + (C)_k) \\ (B)_k = -\{p_k f_k + p'_k (v''_k + (C)_k)\} \end{array} \right\} \quad (28)$$

При  $v''_k = 0$  формулы (28) обращаются в форм. (3).

Совершенно понятно, что в данном случае  $\mu$  и  $\rho$  должны быть выражены в одинаковых единицах измерения. Для того, чтобы не производить перевода  $v_2$  в части радиуса, предпочтительнее перевести в секунды свободный член первого уравнения с тем, чтобы получить  $\mu$  в секундах. Для составления нормальных уравнений и наложения условия минимума на сумму квадратов поправок к углам мы должны в уравнениях (28) сделать замену (C) через  $\rho$ . Имея ввиду формулы (3), т. е.

$$dC = \pm \rho \text{ имеем:}$$

Правый треугольник

$$(A) = f\mu - p(v - \rho)$$

$$(B) = -\{f\mu + p'(v - \rho)\}$$

$$(C) = -\rho$$

Левый треугольник

$$(A) = f\mu - p(v + \rho)$$

$$(B) = -\{f\mu + p'(v + \rho)\} \quad (d)$$

$$(C) = +\rho$$

Наложим условие minimum'a на сумму квадратов изменений углов.

$$[(A)^2 + (B)^2 + (C)^2] = \text{minimum} \quad (e)$$

По возведении в квадрат выражений изменений углов треугольников через  $\mu$  и  $\rho$  фор. (d) мы не получим единобразия в выражениях (e) для правых и левых треугольников, а потому для дальнейших выводов, т. е. составления и решения нормальных уравнений коррелат, введем для  $v$  и  $f$  следующие знаки:

правый	левый
$v_k = A' + B' + C' - (180 + \varepsilon)$	
$v'_k = -v_k$	$v_k = +v_k$
$f = \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$	$f = -\frac{\sin A \sin B}{\sin C}$

(29)

В рядах и полигонах наименование правый или левый прямо связано с положением треугольника относительно ходовой линии. В центральной же, или других системах треугольников, когда связующие стороны выходят из одной точки, левыми треугольниками будут называться треугольники, у которых нумерация возрастает по движению часовой стрелки, а правыми — в которых нумерация возрастает против движения часовой стрелки.

На основании формулы (29) сделаем соответствующие замены знаков при  $v$  и  $f$  в выражениях (d); будем иметь:

правый	левый
(A) $fp + p(v' + \rho)$	— $\{fp + p(v' + \rho)\}$
(B) $-fp + p'(v' + \rho)$	$fp - p'(v' + \rho)$
(C) $-\rho$	$+\rho$

(30)

Совершенно понятно, что при возведении в квадрат выражений (30) мы для правого и левого треугольника получим одинаковые значения, именно:

$$[2f^2\mu^2 + (p^2 + p'^2 + 1)\rho^2 + 2v'(p^2 + p'^2)\rho + 2v'f(p - p')\mu + \\ + 2f(p - p')\mu\rho + v'(p^2 + p'^2)] = \text{minimum} \quad (f)$$

Надо иметь ввиду, что так как, стоящее в скобках, выражение (f) должно быть написано для каждого треугольника, то  $v'$ ,  $f$ ,  $p$ ,  $p'$ ,  $\mu$  и  $\rho$  должны иметь индексы, соответствующие номеру треугольника.

На основании обозначений (12)

$$\begin{aligned} 2f^2 &= F' \\ p^2 + p'^2 + 1 &= G' \\ f(p - p') &= H' \end{aligned}$$

введем обозначение

$$p^2 + p'^2 = R' \quad (g)$$

Тогда выражение ( $f$ ) может быть переписано в следующем виде:

$$[F'\mu^2 + G'\rho^2 + 2v'R'\rho + 2v'H'\mu + 2H'\mu\rho + v'^2R'] = \text{minimum}$$

дифференцируя, сокращая на 2 и делая приведение подобных членов, имеем:

$$[(F'\mu + v'H' + H'\rho)d\mu + (G'\rho + v'R' + H'\mu)d\rho] = 0 \quad (31)$$

Поступая как и ранее, т. е. дифференцируя уравнения (9), помножая их на произвольные множители  $K_1$  и  $K_2$  и складывая, имеем:

$$K_1d\mu_1 + K_1d\mu_2 + \dots + K_1d\mu_n + K_2d\rho_1 + K_2d\rho_2 + \dots + K_2d\rho_n = 0 \quad (h)$$

Приравнивая коэффициенты при  $d\mu$  и  $d\rho$  в выражениях (h) и (31) получим:

$$F'\mu + H'v' + H'\rho = K_1$$

$$G'\rho + R'v' + H'\mu = K_2,$$

решая которые относительно  $\mu$  и  $\rho$  и имея в виду, что на основании (14)

$$\frac{F'}{3f^2} = F; \frac{G'}{3f^2} = G; \frac{H'}{3f^2} = H, \text{ а } F'G' - H'^2 = 3f^2$$

получим:

$$\mu = GK_1 - HK_2 - v_R(G' - R')H$$

$$\rho = -HK_1 + FK_2 - v_R(FR' - HH')$$

Преобразуем выражения, стоящее в скобках, для чего подставим в них значения  $F'$ ,  $H'$ ,  $H$  и имея в виду что  $G' = p^2 + p'^2 + 1$ , а  $R' = p^2 + p'^2$  имеем:

$$(G' - R')H = H.$$

$$\begin{aligned} F'R' - HH' &= \frac{F'R' - H'H'}{3f^2} = \\ &= \frac{2f^2(p^2 + p'^2) - f^2(p - p')^2}{3f^2} \end{aligned}$$

После сокращения на  $f^2$ , возведения в квадрат и замены  $p'$  через  $1 - p$  имеем:

$$FR' - HH' = +\frac{1}{3},$$

а потому имеем выражения для  $\mu$  и  $\rho$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mu_k = G_k K_1 - H_k K_2 - H_k v'_k \\ \rho_k = -H_k K_1 + F_k K_2 - \frac{1}{3} v'_k \end{array} \right\} \quad (32)$$

Подставляя (32) в условные уравнения, имеем нормальные уравнения коррелат:

$$\left. \begin{array}{l} [G] K_1 - [H] K_2 - [H v'_k] + v_1 = 0 \\ -[H] K_1 + [F] K_2 - \frac{1}{3} [v'_k] + v_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (33)$$

Решая уравнения (33), получим выражения для коррелат  $K_1$  и  $K_2$ , именно:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = \frac{[F] ([H v'_k] - v_1) + [H] \left( \frac{1}{3} [v'_k] - v_2 \right)}{[F][G] - [H]^2} \\ K_2 = \frac{[H] ([H v'_k] - v_1) + [G] \left( \frac{1}{3} [v'_k] - v_2 \right)}{[F][G] - [H]^2} \end{array} \right\} \quad (34)$$

В уравнениях (34) под  $v_k$  подразумеваются невязки в треугольниках, под  $v_1$  и  $v_2$  — свободные члены базисного (бокового) условия и условия горизонта. Таким образом отыскание поправок к  $\mu$  и  $\rho$  связанных сторон треугольников под условием минимума суммы квадратов поправок к углам треугольников, удовлетворяющих условиям уравнивания и одновременно приводящих сумму углов треугольника к  $180^\circ$  или к  $180 + \varepsilon$  разрешается помошью уравнений (34) (32) и (28).

Порядок действий при уравнивании следующий:

1. Подсчитываются невязки  $v_k$  в треугольниках, причем

$$v_k = A'_k + B'_k + C'_k - (180^\circ + \varepsilon),$$

где  $\varepsilon$  сферический избыток треугольника.

В том случае, если вычисляются плоские треугольники, то

$$v_k = A'_k + B'_k + C'_k - 180^\circ$$

2. Вычисляются свободные члены условных уравнений, причем полезно  $v_1$  перевести в секунды, т. е.:

$$v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M \sin 1''}; v_2 = [C] - 360^\circ$$

$$\Delta \lg S = \lg \sin A'_1 + \lg \sin A'_2 + \dots + \lg \sin A'_n - \lg \sin B'_1 - \lg \sin B'_2 - \dots - \lg \sin B'_n,$$

где  $A'_k$ ,  $B'_k$  суть наблюденные и исправленные за сферичность углы.

П р и м е ч а н и е: В таком случае  $\mu$  и  $\rho$  получаются в секундах, что облегчает вычисление. Для вычисления  $\mu$  и  $\rho$  по формулам (10) поправок к координатам необходимо  $\mu$  и  $\rho$  умножить на  $\sin 1''$ .

В остальном порядок обработки центральной системы остается общий приведенному выше (стр. 57).

### 13. ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР УРАВНИВАНИЯ НАБЛЮДЕННЫХ УГЛОВ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ.

Приведем решение центральной системы (фиг. 10), углы треугольников которой приведены в таблице 19. Невязки треугольников следующие:

$$v_1 = -1''.68 \quad v_2 = -3''.76 \quad v_3 = +1''.81 \quad v_4 = -0''.52 \\ v_5 = +7''.16 \quad v_6 = -2''.51$$

а логарифмы синусов:

$\lg \sin A'$	$\lg \sin B'$
9.932 0049 3	9.898 1401 8
9.989 4667 3	9.911 4466 6
9.983 0548 6	9.968 2787 1
9.896 0582 0	9.970 9966 3
9.694 7194 5	9.995 2863 6
9.890 0011 8	9.641 1380 0
<hr/>	<hr/>
9.385 3053 5	9.385 2865 4

$$v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M \sin 1''} = \frac{+188.1}{10^7 M \sin 1''} = +8''.93$$

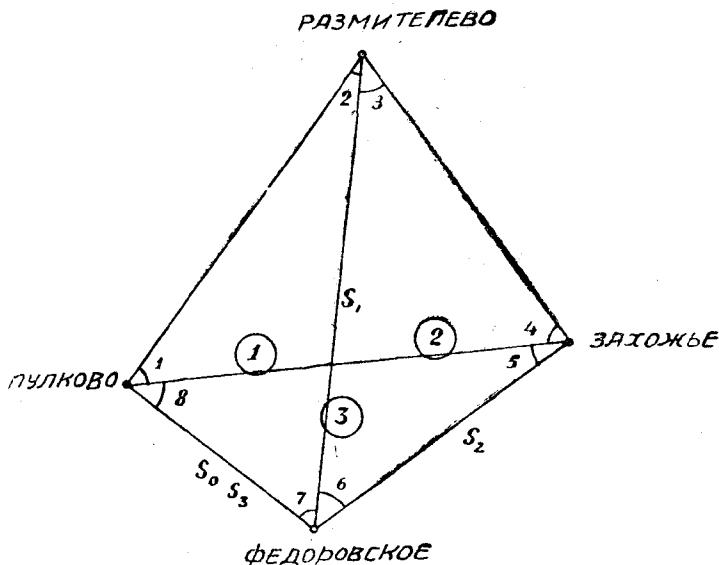
Так как наблюдения велись круговыми приемами, то свободный член второго условного уравнения  $v_2 = 0$ .

В данном случае увеличивать свободные члены уравнений в  $10^6$  раз нет нужды, так как поправки  $\mu$  и  $\rho$  будут выражаться в угловой мере удобной для написания. Решение приведено в таблице 20.

При сравнении поправок углов, полученных по формулам автора, с поправками решения приведенного в геодезии Кларка (перевод В. Витковского, стр. 239) мы устанавливаем, что они дают полное согласие по величине и знаку и отличаются лишь на небольшие доли секунды вследствие округления. С этими поправками сумма углов в каждом треугольнике будет равна  $180^\circ + \epsilon$ .\*)

#### 14. РЕШЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕУГОЛЬНИКА.

Применим формулы (12), (14), (28), (29), (32) и (34) к решению геодезического четырехугольника (фиг. 11).



Фиг. 11.

Вследствие уравнивания связующие стороны  $S_1, S_2$  и  $S_3$  получили некоторые поправки  $m_1, m_2$  и  $m_3$ .

\*). Для сравнения результатов уравнивания, подсчет свободных членов приведен полностью из геодезии Кларка. Достигнутое в результате уравнивания равенство сумм Sin'ов углов  $A'$  и  $B'$ , по приведении углов к плоским, вновь нарушится, так как подсчет свободного члена бокового уравнения в указанном труде произведен по наблюденным сферическим углам.

$$K_1 = \frac{[F] \left( [Hv'_R] - v_1 \right) + [H] \left( \frac{1}{3} [v'_R] - v_2 \right)}{[F][G] - [H]^2}$$

$$K_2 = \frac{[H] \left( [Hv'_R] - v_1 \right) + [G] \left( \frac{1}{3} [v'_R] - v_2 \right)}{[F][G] - [H]^2}$$

$$\mu = GK_1 - HK_2 - Hv'_R$$

$$\rho = -HK_1 + FK_2 - \frac{1}{3} v'_R$$

$$\Delta \lg S = +188.1; v_1 = +8.92 \quad v_2 = 0$$

$$I = [Hv'_R] - v_1 = -2.846$$

$$II = \frac{1}{3} [v'_R] = +0.167$$

$$K_1 = -\frac{11.412}{35.06} = -0.325$$

$$K_2 = +\frac{1.949}{35.06} = +0.056$$

$$[F] = 0.67n = +4.02$$

$$[G] = +8.77$$

$$[H] = -0.17$$

$$[H]^2 = +0.02$$

$$\frac{1}{3} [v'_R] = +0.167$$

$$[Hv'_R] = +6.084$$

Номера треуголь.	$GK_1$	$-HK_2$	$-Hv'_R$	$\mu$	$-HK_1$	$FK_2$	$\frac{1}{3} v'_R$	$\rho$
1	-0.319	+0.003	-0.101	-0.417	-0.020	+0.038	+0.560	+0.578
2	-0.088	+0.018	-1.203	-1.273	-0.104	0.038	+1.253	+1.187
3	-0.078	+0.002	+0.072	-0.004	-0.013	0.038	-0.603	-0.578
4	-0.228	+0.007	+0.068	-0.167	+0.042	0.038	+0.173	+0.252
5	-0.712	-0.030	-3.866	-4.608	+0.176	0.038	-2.387	-2.173
6	-1.427	+0.024	-1.054	-2.457	-0.137	+0.038	+0.837	+0.738
				-8.93				+0.004

Таблица 20.  
Уравнивание наблюденных углов центральной системы.

	1	2	3	4	5	6
$3f^2$	1.53	12.60	6.39	2.19	0.84	0.36
$f^2$	+ 0.51	+ 4.20	+ 2.13	+ 0.73	+ 0.28	+ 0.12
$f$	- 0.725	- 2.054	- 1.459	- 0.861	- 0.526	- 0.349
$\lg f$	9.860	0.312	0.164	9.934	9.720	9.542
$\sin B$	9.898	9.911	9.968	9.971	9.995	9.641
$d \sin C$	0.030	0.412	0.215	0.068	0.031	0.011
$\sin A$	9.932	9.989	9.981	9.896	9.695	6.890
$\cos B$	9.787	9.762	9.567	9.549	9.166	9.954
$\lg p$	9.749	0.164	9.763	9.513	8.892	9.855
$p$	+ 0.561	+ 1.459	+ 0.579	+ 0.326	+ 0.078	+ 0.717
$p'$	+ 0.439	- 0.459	+ 0.421	+ 0.674	+ 0.921	+ 0.283
$\frac{f}{p}$	1.292	1.408	2.519	2.641	6.744	0.487
$\operatorname{tg} B$	1.292	1.409	2.521	2.643	6.744	0.487
$p^2$	+ 0.31	+ 2.13	+ 0.33	+ 0.10	0.00	+ 0.51
$p'^2$	+ 0.19	+ 0.21	+ 0.17	+ 0.44	+ 0.84	+ 0.07
$G'$	+ 1.50	+ 3.34	+ 1.50	+ 1.54	+ 1.84	+ 1.58
$p - p'$	+ 0.12	+ 1.92	+ 0.16	- 0.34	- 0.84	+ 0.44
$H'$	- 0.09	- 3.94	- 0.23	+ 0.29	+ 0.45	- 0.15
$G$	+ 0.98	+ 2.27	+ 0.24	+ 0.70	+ 2.19	+ 4.39
$H$	- 0.06	- 0.32	- 0.13	+ 0.13	+ 0.54	- 0.42
$v'_K$	- 1.68	- 3.76	+ 1.81	- 0.52	+ 7.16	- 2.51
$Hv'$	+ 0.101	+ 1.203	- 0.072	- 0.068	+ 3.866	+ 1.054
$\frac{1}{3} v'_K$	- 0.560	- 1.253	+ 0.603	- 0.173	+ 2.387	- 0.837
(1) = $v_K + (C)$	- 1.102	- 2.573	+ 1.232	- 0.268	+ 4.987	- 1.772
$fp''$	- 0.302	- 2.615	- 0.015	- 0.144	- 2.424	- 0.857
(1) $p$	- 0.618	- 3.751	+ 0.713	- 0.087	+ 0.389	- 1.271
(1) $p'$	- 0.484	+ 1.178	+ 0.519	- 0.179	+ 4.593	+ 0.501
(A)	+ 0.32	+ 1.14	- 0.73	- 0.06	- 2.81	+ 0.41
(B)	+ 0.79	+ 1.43	- 0.50	+ 0.32	- 2.17	+ 1.36
(C)	+ 0.58	+ 1.19	- 0.58	+ 0.25	- 2.17	+ 0.74
(A) + (B) $\neq$ (C)	+ 1.69	+ 3.76	- 1.81	+ 0.51	- 7.15	+ 2.51

При подсчете свободного члена полюсного уравнения по углам, полученным из наблюденных и приведенных к центрам направлений мы имеем:

$$\Delta \lg S = \lg \sin A'_1 + \lg \sin A'_2 + \lg \sin A'_3 - \lg \sin B'_1 - \lg \sin B'_2 - \lg \sin B'_3.$$

Следовательно,  $v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M \sin 1''}$ , а потому мы должны потребовать, чтобы  $m_3 + v_1 = 0$ , или

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + v_1 = 0.$$

Угол  $C_3 = C_1 + C_2$ , а потому

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0.$$

Из рассмотрения фиг. 11 явствует, что треугольники 1 и 2 суть левые и треугольник 3—правый, а потому на основании формулы (29) при вычислении  $H$  и  $[v_e]$  необходимо чтобы  $f$  для левых треугольников были отрицательны, а для треугольника 3  $v_3$  записывается с обратным знаком.

В остальном решение геодезического четырехугольника не отличается от решения центральной системы. Практический пример, данные уравнения по которому заимствованы из практической геодезии В. Витковского (фиг. 11), приведен в табл. 21. Полученное расхождение в поправках к углам по обычному способу и методу автора можно обяснить тем, что при уравнивании автором были приняты не независимо наблюденные углы, а направления, что чаще встречается в практике.

Ном. угл.	Поправки к углам	
	1-ые + 2-ые попр. обычн. способ.	Автора
1	+ 1" 08	- 1.36
2	+ 0.28	- 0.12
3	+ 0.39	+ 0.92
4	+ 1.28	+ 1.44
5	+ 0.18	- 0.16
6	+ 1.54	+ 1.18
7	- 0.80	- 0.73
8	+ 0.09	+ 0.70

Таблица 21.  
Решение геодез. четырехугольника

1	2. B $30^{\circ} 5' 42.''94$ 7. C $60^{\circ} 02' 05.96$ $1+8.$ A $89^{\circ} 52' 13.47$
	$180^{\circ} 00' 02.37$
	$\epsilon = 0.86$
	$v_1'' = +1.51$
2	$4+5.$ B $89^{\circ} 21' 08.01$ 6. C $48^{\circ} 51' 53.83$ 3. A $41^{\circ} 46' 55.76$
	$179^{\circ} 59' 57.60$
	$\epsilon = 0.98$
	$v_2'' = -3.38$
3	8. B $41^{\circ} 18' 43.''89$ $6+7.$ C $108^{\circ} 53' 59.79$ 5. A $29^{\circ} 47' 15.94$
	$179^{\circ} 59' 59.62$
	$\epsilon = 0.62$
	$v_3'' = -1.00$
	$\Delta \lg S = -3$
	$\lg \Delta \lg S = -0.47712$ н.
	$\frac{1}{10^7 M} = 3.36222$
	$d \sin 1'' = 5.31443$
	$\lg v_1 = 9.15377$ н
	$v_1'' = -0.''14$
	$1 = [v_R' H] - v_1 = -2.''18$
	$H = \frac{1}{3} [v_R''] = -0.''30$
	$[G] = +7.08 \quad K_1 = -0.30$
	$[H] = -0.43 \quad K_2 = -0.08$
	$[H]^2 = +0.18$
	$[v_R' H] = -2.''32$

	1	2	3
$3 f^2$	0.99	2.31	0.36
$f^2$	0.33	0.77	0.12
$f$	-0.58	-0.88	+0.35
$\lg f$	9.762	9.947	9.540
$\lg \sin B$	9.700	0.000	9.820
$d \lg \sin C$	0.062	0.129	0.024
$\lg \sin A$	0.000	9.824	9.696
$\lg \cos B$	9.937	8.054	9.876
$\lg p$	9.999	8.001	9.596
$p$	+1.00	+0.01	+0.39
$p'$	0.00	+0.99	+0.61
$\bar{p}$	0.58	9.09	0.88
$\tg B$	0.58	9.09	0.88
$p^2$	1.00	0.00	0.15
$p'^2$	0.00	1.00	0.37
$G'$	+2.00	+2.00	+1.52
$p-p'$	+1.00	-0.98	-0.22
$H''$	-0.58	+0.86	-0.08
$G$	+2.00	+0.86	+4.22
$H$	-0.58	+0.37	-0.22
$v_R$	+1.51	-3.''38	+1.00
$v_R' H$	-0.85	-1.25	-0.22
$\frac{1}{3} v_R''$	+0.50	-1.14	+0.33
$(1) = v_R + (C)$	+0.78	-2.20	-0.54
$\mu''$	+0.12	+0.90	-0.37
$(1) p'$	+0.78	-0.02	-0.21
$(1) p$	0.00	-2.18	+0.33
$(A)$	-0.''66	+0.''92	-0.''16
$(B)$	-0.12	+1.28	+0.70
$(C)$	-0.73	+1.18	+0.46
$\Sigma$	-1.51	+3.''38	+1.''00

## 15. ВСТАВКА ТРЕУГОЛЬНИКОВ МЕЖДУ ДВУМЯ СТОРОНАМИ.

На фиг. 12 изображенавставка треугольников между двумя сторонами.

Решение, очевидно, может быть сведено к решению центральной системы.

1. Приводятся все углы треугольников к плоским путем деления погрешностей треугольников на 3 равные части.

2. Решаются стороны, при чем свободный член первого условного уравнения, очевидно

$$v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M}, \text{ или в секундах}$$

$$v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M \sin 1''}$$

3. Подсчитывается свободный член второго (азимутального) условного уравнения

$$v_2 = (\Sigma C - (\alpha_2 - \alpha_1)) \sin 1'';$$

или в секундах  $v_2 = \Sigma C - (\alpha_2 - \alpha)$ .

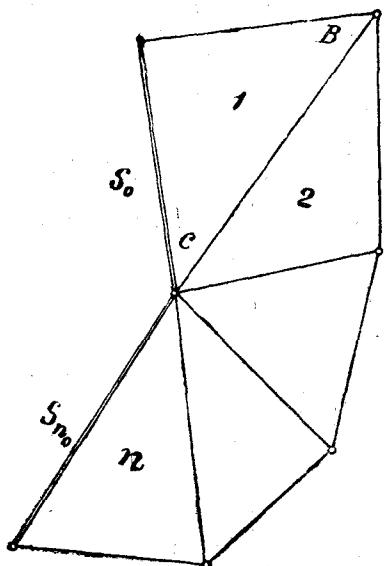
В остальном решение совершенно совпадает с решением центральной системы по первому или второму способам.

В том случае, если уравнивание треугольников производится без приведения углов их к  $180^\circ$ , необходимо применять формулы (12), (14), (28), (29), (32) и (34).

## 16. УРАВНИВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПУНКТА.

Применим фор-лы автора к уравниванию дополнительного пункта. Пусть на фиг. 13 изображен треугольник с уравненными углами, у которого при вершинах 1, 2 и 3 измерены углы на дополнительный пункт Р.

Обозначая треугольник 1, 2, Р чёрез № 1, треугольник 1, 3 Р — № 2, а углы через А, В и С и бера за исходную сторону 1-2, мы при решении сторон 1-Р и затем 1-3 не получим ея исходного логарифма. Очевидно, тут вопрос сводится к отысканию таких поправок  $\mu$  и  $\rho$  к стороне 1-Р, которые удовлетворяли бы минимуму суммы квадратов поправок к углам треугольников № 1 и № 2, а также удовлетворяли бы боковому условию. Обозначая сторону 1-Р через  $S_1$ , сторону 1-3 через  $S_2$ , имеем  $m_2 = \mu_1 + \mu_2$  должно равняться  $-v_1$ .



Фиг. 12.

## Уравнивание дополнительного пункта.

Таблица 22.

Сферич. углы		Плоск.		
1	64° 43' 51".74	51".40		
2	42 03 30.94	30.60		
3	73 12 38.34	38.00		
	180 0 01.02	0.00		

$$C_2 = 32^{\circ} 6' 41''$$

$$A_1 = 24^{\circ} 12' 57''$$

$$B_1 = 47^{\circ} 58' 29''$$

$$\lg (1-2) 4.073 7721$$

$$\lg (1-3) 3.918 6940$$

$$\Delta \lg S = \lg (1-2) + \lg \sin A_K - \lg \sin B_K - \lg (1-3)$$

$$\lg -76 1.88081_n$$

$$\frac{1}{10^7 M} 3.36 222$$

$$\text{доп. } \sin 1'' 5.31 443$$

$$\lg v_1'' 0.55746_n$$

$$v_1 = -3''61 \quad v_2 = 0$$

$$K_1 = -\frac{0.67 n v_1}{[F][G] - [H]^2}$$

$$K_2 = -\frac{[H] v_1}{[F][G] - [H]^2}$$

$$K_1 = +1.35 \quad [F] = +1.34$$

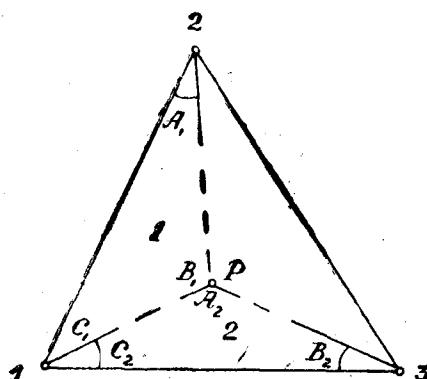
$$K_2 = +0.67 \quad [G] = +3.00$$

$$[H] = +0.67$$

$$[H]^2 = +0.44$$

	1	2
$3f^2$	1.47	4.53
$f^2$	0.49	1.51
$f$	-0.70	-1.23
$\lg f$	0.843	0.088
$\sin B$	9.896	9.871
$d. \sin C$	0.334	0.219
$\sin A$	9.613	9.998
$\cos B$	9.791_n	9.826
$\lg p$	9.738_n	0.043
$p$	-0.55	+1.10
$p'$	+1.55	-0.10
$f$	-1.27	1.12
$\frac{p}{p}$	-1.27	1.11
$\operatorname{tg} B$	-1.27	1.11
$p^2$	+0.30	+1.21
$p'^2$	+2.40	+0.01
$G'$	+3.70	+2.22
$p-p'$	-2.10	+1.20
$H'$	+1.47	-1.48
$G$	+2.52	+0.48
$H$	+1.00	-0.33
$\mu f$	+1''.95	+1''.07
$p(C)$	+0.50	+0.99
$p'(C)$	-1.40	-0.09
$GK_1$	+3.40	+0.65
$-HK_2$	-0.67	+0.22
$\mu$	+2.73	+0.87
$-HK_1$	-1.35	+0.45
$FK_2$	+0.45	+0.45
$\rho$	-0.90	+0.90
(A)	+1.41	+0.68
(B)	-0.51	-0.98
(C)	-0.90	+0.90

Положим свободный член первого уравнения в секундной мере т. е.



Фиг. 13.

$$v_1 = \frac{\Delta \lg S}{10^7 M \sin 1''}$$

тогда имеем первое условие уравнение

$$\mu_1 + \mu_2 + v_1 = 0.$$

Второе условное уравнение напишется следующим образом:

$$\rho_1 + \rho_2 = 0,$$

т. е. изменение угла  $C_1$  должно быть равно изменению  $C_2$  с обратным знаком.

Применяя фор-лы уравнивания центральной системы, т. е. решая корреляты по Формулам (25) и отыскивая поправки по формулам (23), мы найдем по формулам (3) поправки ко всем углам. Решение дополнительного пункта приведено в таблице 22, причем для решения взят числовой пример приведенный в практической геодезии В. Витковского.

Поправки, полученные по методу автора, совпадают с таковыми же полученными по методу, указанному в практической геодезии, и отличаются от них на небольшие доли секунды, вследствие того, что формулы (23) и (25) выведены из требования *minimum'a* суммы квадратов поправок ко всем углам треугольников, в решении же указанном в практической геодезии отыскиваются поправки только к измеренным углам.

## 17. УРАВНИВАНИЕ НАБЛЮДЕННЫХ УГЛОВ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ЗА ПОЛИГОННЫЕ УСЛОВИЯ. СПОСОБ ПЕРВЫЙ.

Для отыскания к наблюденным углам триангуляций поправок, которые одновременно удовлетворяли бы полигонным условиям и условиям фигур требуется, вообще говоря, составление  $n+4$  уравнений, где  $n$  количество треугольников в ряде или полигоне. Совместное решение  $n+4$  уравнений для триангуляций со сколько-нибудь значительным количеством треугольников представляет дело значительной трудности, вследствие чего существующие приемы уравнивания за полигонные условия имеют целью отыскание вторичных поправок к углам треугольников, приведенных первичными поправками, равными  $\frac{1}{3} v_k$ , к  $180^\circ$ . Если такое допущение не оказывается на результатах уравнивания центральной системы, то для полигонного уравнивания, как мы увидим ниже, результаты уравнивания наблюденных углов и углов приведенных к  $180^\circ$  не совпадают.

Приведем вывод формул, дающих возможность уравнивать за полигонные условия непосредственно наблюденные в триангуляции углы под условием minimum'a суммы квадратов поправок к ним, для чего воспользуемся выводами, приведенными в п. 12.

Требование minimum'a суммы квадратов поправок к наблюденным углам треугольников выражается следующим (формула 31).

$$[(F'\mu + H'v_k' + H'\rho) d\mu + (G'\rho + R'v_k' + H'\mu) d\rho] = 0 \quad (a)$$

Дифференцируя условные уравнения (11), помножим их на коррелаты  $K_1, K_2, K_3$  и  $K_4$  и складывая имеем:

$$[(aK_1 + cK_3 + dK_4) d\mu + (aK_2 - dK_3 + cK_4) d\rho] = 0 \quad (b)$$

Приравнивая по неопределенности коррелат коэффициенты в уравнениях (a) и (b) и принимая во внимание обозначения (d) (стр. 12) имеем:

$$\begin{aligned} F'\mu + H'v_k' + H'\rho &= I \\ G'\rho + R'v_k' + H'\mu &= II \end{aligned} \quad (c)$$

или решая уравнения (c) и имея в виду, что  $G' - R' = +1$  и  $F'R' - H'^2 = f^2$  имеем:

$$\begin{aligned} \mu &= GK_1 - HK_2 + (cG + dH) K_3 + (dG - cH) K_4 - Hv_k' \\ \rho &= -HK_1 + FK_2 - (dF + cH) K_3 + (cF - dH) K_4 - \frac{1}{3} v_k' \end{aligned} \quad (35)$$

Вставляя значения  $\mu$  и  $\rho$  из (35) в условные уравнения (11) получим нормальные уравнения коррелат:

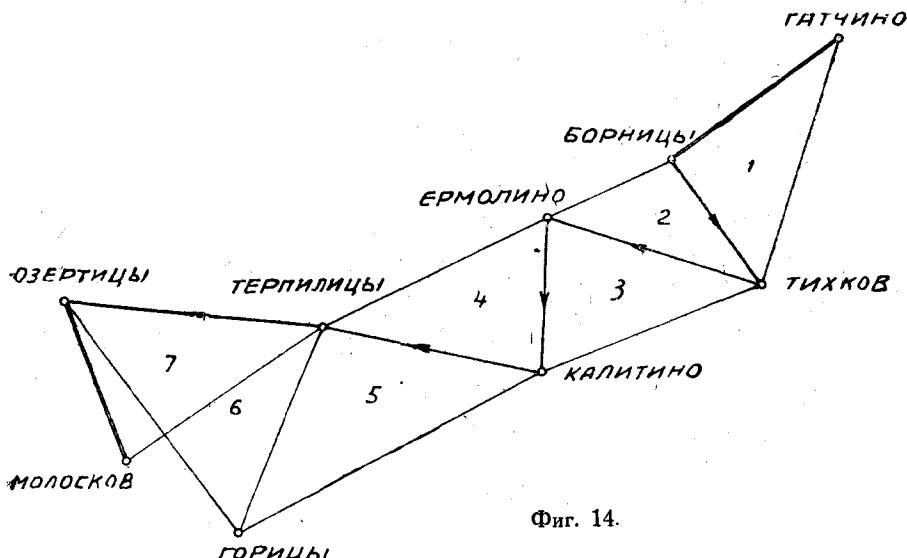
$$\begin{aligned} G]K_1 - [H]K_2 + [cG + dH]K_3 + [dG - cH]K_4 - \left[ Hv_k' \right] + v_1 &= 0 \\ + [F]K_2 - [dF + cH]K_3 + [cF - dH]K_4 - \left[ \frac{1}{3} v_k' \right] + v_2 &= 0 \\ + [c^2G + d^2F + 2cdH]K_3 + [d^2H - c^2H + cdG - cdF]K_4 - & \\ - \left[ cHv_k' - \frac{1}{3} dv_k' \right] + v_3 &= 0 \\ + [d^2G + c^2F - 2cdH]K_4 - \left[ \frac{1}{3} cv_k' + dHv_k' \right] + v_4 &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

где под  $v_k'$  подразумеваются невязки треугольников, выписанные с соответствующими обозначениям (29) знаками.

Сравнивая уравнения (36) с уравнениями (16) мы находим, что уравнивание наблюденных углов триангуляций под условием minimum'a суммы квадратов поправок к ним по формулам автора требует незначительных по об'ему дополнительных вычислений по подсчету поправок к свободным членам уравнений.

### Практический пример.

В качестве примера взят ряд между сторонами Борницы-Гатчино и Озертицы-Молосковицы. Значения наблюденных углов в ряде заимствованы из практической геодезии В. Витковского (фиг. 14, табл. 23).



Фиг. 14.

1. Свободный член первого уравнения подсчитан по наблюденным и исправленным за сферический избыток углам, для чего из каждого наблюденного и приведенного к центру знака угла вычитается треть избытка. Затем выбраны синусы углов и произведено решение сторон от исходной стороны Борницы—Гатчино, логарифм которой в метрах 4.1802201.

Логарифм Озертицы—Молосковицы по вычислению равен 3.992 1852, тогда как данный логарифм равен 3.992 2119 или  $\Delta \lg S = -267$  седьмых знаков.

2. С полученными длинами сторон и наблюдёнными углами, пользуясь исходными данными

$$\text{п. Борницы} \quad \varphi = -59^\circ 31'11.'' 4434$$

$$\lambda = 0^\circ 26'55.9862$$

$$\alpha = 70^\circ 27'50.95 \quad (\text{на Гатчино})$$

Номер табл.	Наименование вершин	Наблюдаемые и при- веденные к центру узлы	Сфер. звезды	Наблюден- ные и испр. за сб. изв.	lg sin	lg S	Поправки к наблюд. узлам		
							Британск. (перв. + втор.)	С.п. перв.	С.п. втор.
1	Тиховицы	48° 47' 59." 25	0." 15	48° 47' 59." 10	9.876 4557	4.180 2201	- 6." 96	- 7." 49	- 6." 84
	Борницы	94 10 24. 16	0. 16	94 10 24. 00			- 11. 42	- 10. 88	- 12. 67
	Гагино	37 1 43. 41	0." 15	37 0 43. 26	9.779 7514	- 4.083 5158	+ 12. 02	+ 12. 01	+ 13. 15
2	Ермолино	46 46 29. 40	0. 10	46 46 29. 30	9.862 5294		- 7. 16	- 7. 10	- 7. 96
	Тиховицы	38 18 30. 88	0. 10	38 18 30. 78			+ 10. 70	+ 10. 38	+ 8. 26
	Борницы	94 55 2. 58	0. 11	94 55 2. 47	9.998 3985	4.219 3850	- 6. 69	- 5. 87	- 2. 85
3	Калитино	70 22 01. 08	0. 14	70 22 00. 94	9.973 9834		+ 1. 47	+ 1. 27	- 0. 26
	Ермолино	70 21 20. 35	0. 15	70 21 20. 20			- 2. 10	- 1. 86	+ 0. 69
	Тиховицы	39 16 30. 04	0. 15	39 16 29. 89	9.801 4330	4.046 8296	+ 9. 60	+ 9. 56	+ 8. 54
4	Тернилицы	35 12 36. 49	0. 16	35 12 36. 33	9.760 8567		+ 0. 66	+ 0. 42	- 3. 33
	Калитино	76 53 05. 02	0. 17	76 53 04. 85			+ 2. 01	+ 2. 00	+ 9. 15
	Ермолино	67 54 20. 98	0. 16	67 54 20. 82	9.966 8766	4.252 8495	- 4. 67	- 4. 42	- 7. 53
5	Горицы	47 23 59. 38	0. 22	47 23 59. 16	9.866 9335		- 2. 09	- 1. 76	- 1. 83
	Тернилицы	96 19 57. 39	0. 21	96 19 57. 18			+ 4. 96	+ 4. 78	+ 8. 40
	Калитино	36 16 03. 54	0. 22	36 16 03. 32	9.771 9967	4.157 9127	- 2. 53	- 2. 68	- 6. 22
6	Озертицы	0. 31	0. 65	- 0. 34			- 3. 20	- 2. 86	+ 1. 99
	Тернилицы	44 57 3. 50	0. 20	44 57 03. 30	9.849 1127		+ 3. 89	+ 3. 58	+ 3. 95
	Горицы	55 2 51. 06	0. 20	55 02 50. 86	9.993 3546	4.302 1546	- 3. 42	- 3. 45	- 8. 67
7	Молосковицы	90 28 30. 33	0. 15	90 28 30. 18	9.999 9851		- 7. 08	- 6. 75	- 10. 27
	Озертицы	60 11 59. 79	0. 14	60 11 59. 65			+ 14. 07	+ 13. 58	+ 13. 83
	Тернилицы	29 19 38. 08	0. 14	29 19 37. 94	9.690 0157	3.992 1852	- 14. 76	- 14. 60	- 11. 34
		8. 20	0. 43	+ 7. 77					
									$[(\cdot)^2] =$
									1140   1140   1380

произведено вычисление по ходовой линии географических координат пунктов, причем оказалось

$$\begin{aligned}\varphi &= 59^{\circ}29'16.''7968 \\ \text{п. Озертицы} \quad \lambda &= -118^{\circ}44.0273 \\ \alpha &= 150^{\circ}38\ 10.71 \quad (\text{на Молосковицы}).\end{aligned}$$

При сравнении полученных данных для п. Озертицы с имеющимися для него

$$\begin{aligned}\varphi &= 59^{\circ}29'16.''6178 \\ \text{п. Озертицы} \quad \lambda &= -118^{\circ}44.6132 \\ \alpha &= 150^{\circ}38\ 07.00 \quad (\text{на Молосковицы}).\end{aligned}$$

получились следующие расхождения:

$$\Delta\alpha = +3.''71 \quad \Delta\varphi = +0.''1790 \quad \Delta\lambda = +0''.5859$$

С полученными расхождениями длины конечной стороны, азимута и координат п. Озертицы вычислены, согласно п. 6 практических указаний, свободные члены условных уравнений. При этом здесь введены

$v_1$	$v_2$
$\Delta \lg S = -267$	$v_2' = +3.''71$
$\lg 2.42\ 651 \text{ п}$	$-\Delta \lambda \sin \varphi = -0.50$
$d. 10''M 3.36\ 222$	$v_2' = +3.2$
$d. \sin 1'' 5.31\ 443$	$-[\frac{1}{3}v'_k] = -1.00$
$\lg v_1 = 1.10\ 316 \text{ п}$	
$v_1 = -12.''68$	$v_2 = +2.''21$
$-[Hv'_k] = -0.45$	
$v_1 = -13.''13$	

$v_3$	$v_4$
$v'_3 = +5.416 \text{ м}$	$v'_4 = +9.293$
$\frac{v'_3}{10^3} = +0.105\ 416 \text{ м}$	$\frac{v'_4}{10^3} = +0.009\ 293$
$\lg 7.78 = 368$	$\lg 7.96 = 813$
$d. \sin 1'' 5.31\ 443$	$d. \sin 1'' 5.31\ 443$
$\lg v_3 = 3.04\ 811$	$\lg v_4 = 3.28\ 259$
$v_3'' = +1117.''2$	$v_4'' = +1916.9$
$-[cHv'_k - \frac{1}{3}d v'_k] = 77.6$	$-[\frac{1}{3}c v'_k + d H v'_k] = -126.6$
$v_3 = +1194.''8$	$v_4 = +1790.3$

некоторые особенности, именно: все свободные члены (за исключением азимутального) разделены на  $\sin 1''$  с тем, чтобы  $\mu$  и  $\rho$  получались в секундах дуги, следовательно свободные члены третьего и четвертого уравнений в (метрах) преобразованные, если вычисление ведется в теографических координатах, согласно п. 6 практических указаний, необходимо как и  $v_1$  разделить на  $\sin 1''$ .

Таким образом в вычислении сторон, а также в вычислении и преобразовании свободных членов уравнений по существу и заключается различие между первым способом автора, который дает minimum суммы квадратов поправок к плоским, приведенным к  $180^\circ$  углам и способом автора, уравнивающим под тем же требованием наблюденные углы.

Подсчет необходимых для преобразования свободных членов уравнений,  $Hv_k'$  и  $\frac{1}{3}v_k'$  произведен в табл. 24, а  $\frac{1}{3}cv_k$ ,  $\frac{1}{3}dv_k$  и  $dHv_k'$  в таблице 25, где приведено также составление коэффициентов условных уравнений и нормальных уравнений коррелат.

При выписывании в таблицу 24 погрешностей треугольников, подсчитанных по формуле  $A' + B' + C' - (180^\circ + \epsilon) = v_k$ , необходимо помнить, что для левых треугольников знак  $v_k$  сохраняется, для правых же меняется на обратный (формула 29), и на основании тех же обозначений, для левых треугольников знак при  $f$  устанавливается минус.

Полученные из таблицы 25 по формулам (36) нормальные уравнения

$$+ 11.84 K_1 - 1.57 K_2 - 32.93 K_3 - 345.21 K_4 - 13.13 = 0$$

$$+ 4.69 K_2 + 139.29 K_3 + 55.08 K_4 + 2.21 = 0$$

$$+ 5623.4 K_3 + 2051.5 K_4 + 1194.8 = 0$$

$$+ 13891.5 K_4 + 1790.3 = 0$$

решены по схеме Гаусса, причем получились следующие коррелаты:  $K_1 = -4.7742$ ,  $K_2 = +19.9970$ ,  $K_3 = -0.6516$ ,  $K_4 = -0.2306$ . Вычисление масштабных и азимутальных поправок, а также поправок к наблюденным углам, произведено в табл. 26.

Поправки к углам выписаны в табл. 23, причем при сличении с поправками, полученными по Британскому приему (в табл. выписаны суммарные поправки за невязки треугольников и за уравнивание), мы убеждаемся в том, что почти все поправки по абсолютным величинам менее таковых же, полученных Британским приемом, и общая сумма квадратов поправок для Британского равна 1190 и автора 1140.

При вычислении поправок к координатам Гаусса—Крюгера (форм 10) необходимо по  $\mu''$  и  $\rho''$  вычислить  $m_k''$ ,  $r_k''$  (формула 2) и затем помножением их на  $10^6 \sin 1''$ , т. е. на 4.848, получить  $m_k$  и  $r_k$ . Совершенно понятно, что тогда произведения, входящие в формулы (10) будут увеличены в миллион раз, а потому при списывании с арифмометра  $m\Delta X$  и т. д. было бы необходимо сбрасывать шесть знаков, но так как помножение производится на приращения, выписанные в километрах, сбрасываются

Таблица 24.  
Подсчет постоянных треугольников.

Номера треуголь- ников	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{f}{p}$	+ 1.140	+ 1.064	- 2.800	+ 0.706	+ 1.085	+ 1.000	- 113.0
$\operatorname{tg} B$	+ 1.142	+ 1.064	+ 2.803	+ 0.705	+ 1.087	+ 0.998	- 120.6
$3f^2$	0.60	4.17	1.17	0.90	0.57	2.16	0.96
$f^2$	0.20	1.39	0.39	0.30	0.19	0.72	0.32
$f$	- 0.454	+ 1.175	- 0.633	+ 0.549	- 0.438	- 0.849	- 4.565
$\lg f$	9.657	6.070	9.801	9.740	9.642	9.928	9.752
$\sin B$	9.876	9.863	9.974	9.761	9.867	9.849	0.000
$\Delta \sin C$	0.001	0.208	0.026	0.012	0.003	0.086	0.062
$\sin A$	9.780	9.999	9.801	9.967	9.772	9.993	9.690
$\cos B$	9.819	9.836	9.526	9.912	9.831	9.850	7.911n
$\lg p$	9.600	0.043	9.353	9.891	8.606	9.929	7.663n
$p$	+ 0.398	+ 1.104	+ 0.226	+ 0.778	+ 0.404	+ 0.849	- 0.005
$p'$	+ 0.602	- 0.104	+ 0.774	+ 0.222	+ 0.596	+ 0.151	+ 1.005
$p^2$	0.16	1.21	0.05	0.60	0.16	0.72	0.00
$p'^2$	0.36	0.01	0.59	0.04	0.36	0.02	1.00
$G'$	+ 1.52	+ 2.22	+ 1.64	+ 1.64	+ 1.52	+ 1.74	+ 2.00
$p - p'$	- 0.20	+ 1.21	- 0.55	+ 0.56	- 0.19	+ 0.70	- 1.01
$H'$	+ 0.09	+ 1.42	+ 0.35	+ 0.31	+ 0.08	- 0.59	+ 1.57
$G$	+ 2.53	+ 0.53	+ 1.40	+ 1.82	+ 2.67	+ 0.81	+ 2.08
$H$	+ 0.15	+ 0.34	+ 0.30	+ 0.33	+ 0.14	- 0.27	+ 0.58
$v_k' = \mp v_k''$	+ 6."36	- 2."55	- 8."97	- 2."00	- 0."34	+ 2."73	+ 7."77
$Hv_k'$	+ 0.95	- 0.87	- 2.69	- 0.66	- 0.05	- 0.74	+ 4.51
$\frac{1}{3}v_k'$	+ 2.12	- 0.85	- 2.99	- 0.67	- 0.11	- 0.91	+ 2.59

Таблица 25.

**Составление условных уравнений, нормальных уравнений коррелят и поправок к свободным членам уравнений.**

H-pa tp-b.	$\Delta x$	$\Delta y$	F	G	H	S	e	d	cF	cG	cH	cS
1	-11.69	+3.21	+0.67	+ 2.53	+ 0.15	+ 3.35	- 3.23	-48.92	- 2.16	- 8.17	-0.48	-10.82
2	+ 9.82	-13.35	0.67	0.53	+ 0.34	+ 1.54	+ 8.46	-52.13	+ 5.67	+ 4.48	+ 2.88	+13.03
3	-10.67	-3.20	0.67	1.40	+ 0.30	+ 2.37	-1.36	-38.78	-0.91	-1.90	-0.41	-3.22
4	+ 8.90	-15.53	0.67	1.82	+ 0.33	+ 2.82	+ 9.31	-35.58	+ 6.24	+16.94	+3.07	+26.25
5	-	-	0.67	2.67	+ 0.14	+ 3.48	+ 0.41	-20.05	+ 0.27	+ 1.09	+ 0.06	+ 1.43
6	+ 0.41	-20.05	0.67	0.81	-0.27	+ 1.21	+ 0.41	-20.05	+ 0.27	+ 0.33	-0.11	+ 0.50
7	-	-	+ 0.67	+ 2.08	+ 0.58	+ 3.33	0.00	0.00	-	-	-	-
	- 3.23	-48.92	+ 4.69	+11.84	+1.57	+18.10			+ 9.38	+ 12.77	+ 5.01	+ 27.17
H-pa tp-b.	$c^2F$	$c^2G$	$c^2H$	$c^2S$					$d^2F$	$d^2G$	$d^2H$	$d^2S$
1	+ 6.98	+ 17.65	+ 1.04	+ 25.53	- 32.8	-123.8	- 7.3	-163.9	+ 1605	+ 6056	+ 357	+ 8018
2	+ 47.97	+ 37.90	+ 24.36	+ 110.23	- 34.9	- 27.6	-17.7	- 80.3	+ 1854	+ 1465	+ 940	+ 4266
3	+ 1.24	+ 2.58	+ 0.56	+ 4.38	- 26.0	- 54.3	-11.6	- 91.9	+ 1008	+ 2106	+ 450	+ 3564
4	+ 58.09	+ 157.71	+ 28.58	+ 244.39	- 23.8	- 64.8	-11.7	-100.3	+ 847	+ 2306	+ 416	+ 3569
5	+ 0.11	+ 0.45	+ 0.02	+ 0.59	- 13.4	- 53.5	- 2.8	- 69.8	+ 269	+ 1073	+ 56	+ 1399
6	+ 0.11	+ 0.14	- 0.05	+ 0.21	- 13.4	- 16.2	+ 5.4	- 24.3	+ 269	+ 325	- 108	+ 487
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	-114.50	+216.43	+54.51	+385.33	-144.3	-340.2	-45.7	-530.5	+5852	+13332	+2111	+ 21303
H-pa tp-b.	$cdF$	$cdG$	$cdH$	$cdS$	$Hv_{\kappa}$	$\frac{1}{3}V'_{\kappa}$	$cHv'_{\kappa}$	$\frac{1}{3}ev'_{\kappa}$	$dHv'_{\kappa}$	$dv'_{\kappa}$	$\frac{1}{3}dv'_{\kappa}$	
1	+105.9	+399.9	+ 23.6	+529.4	+ 0."95	+2."12	- 3.07	- 6.85	- 46.47	-103.71	-	
2	-205.3	-233.5	-149.7	-679.3	-0.87	-0.85	- 7.36	- 7.19	+ 45.35	+ 44.31	-	
3	+ 35.4	+ 73.8	+ 15.8	+125.0	-2.69	-2.99	+ 3.66	+ 4.07	+104.32	+115.95	-	
4	-221.6	-603.3	-108.9	-933.8	-0.66	-0.67	- 6.14	- 6.24	+ 23.48	+ 23.84	-	
5	- 5.5	- 21.9	- 1.1	- 28.6	- 0.05	- 0.11	- 0.02	- 0.05	- 0.05	+ 1.00	+ 2.21	-
6	- 5.5	- 6.6	- 2.2	- 10.0	- 0.74	+ 0.91	- 0.30	+ 0.37	+ 14.84	- 18.25	-	
7	-	-	-	-	+ 4.51	+ 2.59	- 0.00	0.00	- 0.00	- 0.00	- 0.00	-
	-386.6	-391.6	-222.5	-997.3	+ 0.45	+ 1.00	-13.23	-15.89	+142.52	+ 64.35	-	

Таблица 26.

Вычисление масштабных и азимутальных поправок и поправок к углам треугольников.

	1	2	3	4	5	6	7	S
(1)=cG+dH	-15.47	-13.22	-13.50	-1.71	+ 5.73	-	-	32.93
(2)=dG-eH	-123.32	-30.48	-53.89	-67.87	+ 53.56	+ 16.09	-	345.21
(3)-(dF+eH)	+ 33.28	+ 32.02	+ 26.41	+ 20.73	+ 13.34	+ 13.51	+ 189.29	
(4)=cF-dH	+ 5.14	+ 23.37	+ 10.69	+ 17.94	+ 3.07	- 5.13	+ 55.08	
GK <sub>1</sub>	- 12.08	- 2.53	- 6.68	- 8.69	- 12.75	-	-	
- HK <sub>2</sub>	- 3.00	- 6.80	- 6.00	- 6.60	- 2.80	+ 5.40	- 9.93	56.53
(1)K <sub>3</sub>	+ 10.08	+ 8.61	+ 8.80	+ 3.41	+ 1.11	- 3.73	- 11.60	31.40
(2)K <sub>4</sub>	+ 28.44	+ 7.03	+ 12.43	+ 15.65	+ 12.35	+ 3.71	-	21.46
- Hv'	- 0.95	+ 0.87	+ 2.69	+ 0.66	+ 0.05	+ 0.74	+ 4.51	79.61
								0.45
p''	4.22.49	+ 7.18	+ 11.24	- 2.39	- 2.04	+ 2.25	- 26.04	+ 12.69
- HK <sub>1</sub>	+ 0.72	+ 1.62	+ 1.43	+ 1.58	+ 0.67	- 1.29	+ 2.77	7.50
+ FK <sub>2</sub>	+ 13.40	+ 13.40	+ 13.40	+ 13.40	+ 13.40	+ 13.40	+ 13.40	93.79
(3)K <sub>3</sub>	- 21.69	- 20.86	- 17.21	- 13.51	- 8.69	- 8.80	-	90.76
(4)K <sub>4</sub>	- 1.19	- 5.39	- 2.47	- 4.14	- 0.71	- 1.18	-	12.72
- 1/V'	- 2.12	+ 0.85	+ 2.59	+ 0.67	+ 0.11	+ 0.91	- 2.59	- 1.00
p''	- 10.88	- 10.38	- 1.86	- 2.00	+ 4.78	+ 3.58	+ 13.58	- 3.19
v''+(C)	- 4.52	+ 12.93	- 10.83	+ 4.00	+ 4.44	+ 6.31	+ 21.35	
f <sub>g</sub>	+ 10.21	+ 8.44	+ 7.11	- 1.31	- 0.89	+ 1.91	- 14.71	
p(v+(C))	- 2.72	- 1.34	- 8.38	+ 0.89	+ 2.65	+ 0.95	+ 21.46	
p(v+(C))	- 1.80	+ 14.27	- 2.45	+ 3.11	+ 1.79	+ 5.36	- 0.11	
(B)	- 7.79	- 7.10	+ 1.27	+ 0.42	- 1.76	- 2.86	- 6.75	
(C)	- 10.88	+ 10.38	- 1.86	+ 2.00	+ 4.78	+ 3.58	+ 13.58	
(A)	+ 12.01	- 5.87	+ 9.56	- 4.42	- 2.68	- 3.45	- 14.60	
	- 6.36	- 2.55	+ 8.97	- 2.00	+ 0.34	- 2.73	- 7.77	

очевидно только три знака. Поправки к логарифмам связующих сторон легко получаются помножением  $m_k$  на  $10^7 M \sin 1''$  т. е. на 21.055.

Уравнивание наблюденных углов триангуляции, являясь теоретически более совершенным приемом, нежели уравнивание приведенных к  $180^\circ$  или сферических углов, и давая лучшие результаты, в тоже время, как мы видим из приведенного примера обработки по формулам автора, не представляет затруднений, что дает уверенность в их практической применимости.

Время, потребное на обработку одного треугольника, равняется около 1 ч. 5 мин., включая вычисление поправок к углам или вычисление поправок к координатам Гаусса-Крюгера вершин треугольников.

### Способ второй.

Выше мы нашли формулы уравнивания триангуляций за полигонные условия, удовлетворяющие требованию minimum'a суммы квадратов поправок к наблюденным углам. Разовьем наши рассуждения применительно к требованию minimum'a деформации треугольников. Если бы мы воспользовались для вычисления промежуточной стороны наблюдеными и исправленными за сферический избыток углами, то согласно принятых выше обозначений имеем:

$$S'_k = S_{k-1} \frac{\sin C'}{\sin B'}$$

Дифференцируя  $S'_k$  по  $C'$   $B'$ , согласно выводов (стр. 7) имеем:

$$dS'_k = S_{k-1} \left( \frac{\cos C'}{\sin B'} dC' - \sin C' \frac{\cos B'}{\sin^2 B'} dB' \right)$$

или заменяя отношение сторон отношением синусов углов, имеем:

$$\mu'_k = \operatorname{ctg} C' dC' - \operatorname{ctg} B' dB'$$

Подставляя значение  $dB' = (B)$  (форм. 28) и  $dC' = (C)$ , имеем:

$$\mu'_k = \operatorname{ctg} C' (C) + \operatorname{ctg} B' f \mu + \operatorname{ctg} B' p (v_k + (C))$$

Имея в виду значения  $f$ ,  $p$  и  $p'$  (форм. 3), получим:

$$\mu' = p \mu + f(C) + q v_k$$

$$\text{где } q = \frac{\cos A \cos B}{\sin C}$$

Выписав аналогично формуле (17) изменения всех элементов треугольника, по возведении в квадрат мы не получим одинаковых выражений для правых и левых треугольников, а потому положим аналогочно (29)

правый	левый	
$v_k' = -v_k''$	$v_k' = +v_k''$	
$f = \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$	$f = -\frac{\sin A \sin B}{\sin C}$	(d)
$q = \frac{\cos A \cos B}{\sin C}$	$q = -\frac{\cos A \cos B}{\sin C}$	

Тогда, заменяя  $dC$  через  $\pm\rho$ , изменения всех элементов треугольника, имея ввиду форм. (30), (37) и (d), напишутся в следующем виде:

	правый и левый
(A)	$\pm f\mu \pm p(v+\rho)$
(B)	$\mp f\mu \mp p'(v+\rho)$
(C)	$\mp \rho$
$\mu_{k-1}$	0
$\mu_k$	$\mu$
$\mu'_k$	$p\mu - f\rho - qv$
$\mu - \mu'$	$\mu - p\mu + f\rho + qv$

или по возведении в квадрат и приведении подобных членов, заменяя  $p'$  через  $1-p$ , сокращая на 2 и имея в виду, что  $fq = pp'$ , а на основании обозначений (19) геометрический вес треугольника

$$P = f^2 + p^2 + p',$$

условие minimum'a деформации треугольника пишется в следующем виде:

$$[P\mu^2 + P\rho^2 + (p - p')(f - q)v' \mu + v_k' \rho + \frac{1}{2}(p^2 + p'^2 + q)v_k'^2] = \\ = \text{minimum} \quad (e)$$

Согласно обозначений (d)  $f - q$  для правых треугольников после подстановки значений  $f$  и  $q$  будет

$$f - q = \operatorname{ctg} C$$

и для левых

$$f - q = -\operatorname{ctg} C,$$

а потому условие minimum'a деформации треугольников перепишется окончательно:

$$[P\mu^2 + P\rho^2 + Q'v'_k\mu + v'_k\rho + \frac{1}{2}(p^2 + p'^2 + 2q^2)v'^2] = \text{minimum}, \quad (38)$$

где

правые треугольн.	левые треугольн.
$v'_k = -v_k$	$v'_k = +v_k$
$Q' = (p - p') \operatorname{ctg} C$	$Q' = -(p - p') \operatorname{ctg} C$

(39)

Дифференцируя выражение (38) и приравнивая нулю, имеем:

$$[(2P\mu + Q'v'_k)d\mu + (2P\rho + v'_k)d\rho] = 0$$

Поступая аналогично вывода формул minimum'a деформации треугольников (стр. 42), имеем выражения для  $\mu$  и  $\rho$

$$\begin{aligned}\mu &= AK_1 + CK_3 + DK_4 - Qv_k \\ \rho &= AK_2 - DK_3 + CK_4 - Av_k\end{aligned}\quad (40)$$

$$\frac{1}{2P} = A; \quad \frac{c}{2P} = C; \quad \frac{d}{2P} = D; \quad \frac{Q'}{2P} = Q \quad (41)$$

Подставляя  $\mu$  и  $\rho$  из (40) в уравнения (11), имеем нормальные уравнения коррелят.

$$\begin{aligned}[A]K_1 + 0K_2 + [C]K_3 + [D]K_4 &- [Qv_k] + v_1 = 0 \\ [A]K_2 - [D]K_3 + [C]K_4 &- [Av_k] + v_2 = 0 \\ [cC + dD]K_3 + 0K_4 - [cQv_k - dAv_k] + v_3 &= 0 \quad (42) \\ [cC + dD]K_4 - [cAv_k + dQv_k] + v_4 &= 0\end{aligned}$$

Поясним применение формул уравнивания наблюденных углов под условием minimum'a деформации треугольников, для чего возьмем тот же ряд между сторонами Борницы-Гатчино и Озвертицы-Молосковицы.

В табл. 27 приведен подсчет постоянных треугольников  $f$ ,  $r$  и  $r'$  и по ним геометрических весов  $P$  треугольников, кроме того подсчитаны (форм. 39 и 41)  $Q'$ ,  $Av_k$  и  $Qv_k = QAv_k$ . Здесь надо особенное внимание обратить на знаки при  $v_k$  и  $\operatorname{ctg} C$ . Так, согласно обозначений (39) для составления  $Av_k$  и  $Qv_k$  невязки треугольников  $v_k$ , подсчитанные по ф-ле  $v''_k = A' + B' + C' - (180 + \epsilon)$ , выписываются в табл. 27 для левых

Таблица 27.

## Вычисление геометрических весов и постоянных треугольников.

Номера треугольн.	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{f}{p}$	+ 1.140	+ 1.064	+ 2.800	+ 0.706	+ 1.085	+ 1.000	- 113.0
$\text{tg } B$	+ 1.142	+ 1.064	+ 2.803	+ 0.705	+ 1.087	+ 0.998	- 120.6
f	+ 0.454	+ 1.175	+ 0.633	+ 0.549	+ 0.438	+ 0.849	+ 0.565
lgf	9.657	0.070	9.801	9.740	9.642	9.928	9.752
sin B	9.876	9.863	9.974	9.761	9.867	9.849	0.000
d sin C	0.001	0.208	0.026	0.012	0.003	0.086	0.062
sin A	9.780	9.999	9.801	9.967	9.772	9.993	9.690
cos B	9.819	9.836	9.526	9.912	9.831	9.850	7.911n
lgp	- 9.600	0.043	9.353	9.891	9.606	9.929	7.963n
p	+ 0.398	+ 1.104	+ 0.226	+ 0.778	+ 0.404	+ 0.849	- 0.005
p'	+ 0.602	- 0.104	+ 0.774	+ 0.222	- 0.596	+ 0.151	+ 1.005
$p^2$	+ 0.16	+ 1.21	+ 0.05	+ 0.60	+ 0.16	+ 0.72	0.00
$f^2$	+ 0.20	+ 1.39	+ 0.39	+ 0.30	+ 0.19	+ 0.72	+ 0.32
P	+ 0.96	+ 2.50	+ 1.21	+ 1.12	+ 0.95	+ 1.59	+ 1.32
$A = \frac{1}{2P}$	0.52	0.20	0.41	0.45	0.53	0.31	0.38
$p - p'$	- 0.20	+ 1.21	- 0.55	+ 0.56	- 0.19	+ 0.70	- 1.01
$\pm \text{ctg } C$	+ 0.07	+ 0.27	- 0.36	+ 0.23	+ 0.11	- 0.70	- 0.57
Q'	- 0.01	+ 1.54	+ 0.20	+ 0.13	- 0.03	- 0.49	+ 0.58
$v_K$	+ 6."36	- 2".55	- 8".97	- 2"00	- 0.34	+ 2.73	+ 7.77
$A v_K$	+ 3.31	- 0.51	- 3.68	- 0.90	- 0.18	+ 0.85	+ 2.95
$Q' v_K$	- 0.03	- 0."79	- 0.74	- 0.12	0.00	- 0.42	+ 1.77

Таблица № 28.

## Составление условных уравнений и нормальных уравнений коррелат.

Номера тр-ков	$\Delta x$ в ЕМ	$\Delta y$ в ЕМ	c	d	$A = \frac{1}{2P}$	$Qv'_k$	$Av'_k$	s	c
1	-11.69	+ 3.21	-3.23	-48.92	+0.52	-0."03	-3."31	+3.80	-1.68
2	+ 9.82	-13.35	+8.46	-52.13	+0.20	-0."79	-0. 51	-1.10	+1.69
3	-10.67	- 3.20	-1.36	-38.78	+0.41	-0."74	-3. 68	-4.01	-0.56
4	+ 8.90	-15.53	+9.31	-35.58	+0.45	-0. 12	-0. 90	-0.57	+4.19
5	-	-	+0.41	-20.05	+0.53	0. 00	-0. 18	+0.35	+0.22
6	+ 0.41	-20.05	+0.41	-20.05	+0.31	-0. 42	+0. 85	+0.74	+0.13
7	-	--	0.00	0.00	+0.38	+1. 71	+2. 95	+5.04	-
	- 3.23	-48.92			+2.80	-0. 39	+1. 84	+4.25	+3.98

Таблица 29.  
Вычисление неизвестных через корреляты.

Номера треугольников	1	2	3	4	5	6	7	S
+ AK <sub>1</sub>	- 25."38	- 9."76	- 20.01	- 21."97	- 25."87	- 15."13	- 18."55	- 136."68
+ CK <sub>3</sub>	+ 2.34	- 2.32	+ 0.78	- 5.83	- 0.31	- 0.18	-	5.54
+ DK <sub>4</sub>	+ 46.45	+ 19.05	+ 29.03	+ 29.23	+ 19.41	+ 11.36	-	+ 154.53
- Qv'	+ 0.03	+ 0.79	+ 0.74	+ 0.12	0.00	+ 0.42	- 1.71	+ 0.39
$\rho''$	+ 23.43	+ 7.73	+ 10.54	+ 1.55	- 6.77	- 3.53	- 20.26	+ 12.70
+ AK <sub>2</sub>	+ 22."96	+ 8."83	+ 18.11	+ 19.87	+ 23.41	+ 13.69	+ 16.78	+ 123.65
- DK <sub>2</sub>	- 35.39	- 14.51	- 22.12	- 22.27	- 14.79	- 8.65	-	- 117.72
+ CK <sub>4</sub>	+ 3.07	- 3.09	+ 1.02	- 7.65	- 0.40	- 0.24	-	7.27
- Av'	- 3.31	+ 0.51	+ 3.68	+ 0.90	+ 0.18	- 0.85	- 2.95	- 1.84
$\rho''$	- 12.67	- 8.26	+ 0.69	- 9.15	+ 8.40	+ 3.95	+ 13.83	- 3.18
(1)=v''+(C)	- 6.31	+ 10.81	-	8.28	+ 11.16	+ 6.68	+ 21.61	
fu''	+ 10.64	+ 9.08	+ 6.67	+ 0.85	- 2.97	- 3.60	- 11.45	
p'(1)	- 3.80	- 1.12	- 6.41	+ 2.48	+ 4.80	+ 1.01	+ 21.72	
p(1)	- 2.51	+ 11.93	- 1.87	+ 8.68	+ 3.25	+ 5.67	- 0.11	
(B)	- 6."84	- 7."96	- 0."26	- 3."33	- 1."83	+ 1."99	- 10."27	
(C)	- 12.67	+ 8.26	+ 0.69	+ 9.15	+ 8.40	+ 3.95	+ 13.83	
(A)	+ 13.15	- 2.85	+ 8.54	- 7.83	- 6.22	- 8.67	- 11.34	
(A)+(B)+(C)	- 6.36	- 2.55	+ 8.97	- 2.01	+ 0.85	- 2.73	- 7.78	

треугольников со своими знаками и с обратными знаками — для правых;  $\operatorname{ctg} C$  записываются со своими знаками для правых треугольников и с обратными знаками для левых. При этом  $\operatorname{ctg} C$  удобнее всего брать по таблицам натуральных тригонометрических функций. В остальном решение не представляет особенностей, отличающих его от второго способа автора, и ход его ясен из приведенных табл. 28 и 29.

Получившиеся из табл. 28 нормальные уравнения

$$\begin{aligned} +2.80 K_1 + 0 K_2 + 3.98 K_3 - 84.63 K_4 - 12.29 &= 0 \\ +2.80 K_2 + 84.63 K_3 + 3.98 K_4 + 1.37 &= 0 \\ +3373 K_3 + 0 K_4 + 1150 &= 0 \\ +3373 K_4 + 1851 &= 0 \end{aligned}$$

решены по схеме Гаусса, при этом для коррелят найдены следующие значения:

$$K_1 = -48.816, K_2 = +44.162, K_3 = -1.391, K_4 = -1.826.$$

Необходимо указать, что свободные члены уравнений, согласно предыдущему примеру, вычислены в секундах, так что  $\mu$  и  $\rho$  получаются в секундах.

Результаты решения помещены в табл. 23.

В сложных сетях триангуляций, покрывающих значительные площади, всегда возникает большое количество условных уравнений, совместное решение которых весьма затруднительно.

Большую часть этих уравнений представляют собою условия фигур, а потому уменьшение количества уравнений в площадных триангуляциях путем исключения условий фигур является одной из существенных задач.

Всякую сложную сеть возможно представить, как комбинацию из отдельных систем (центральная система, геодезический четырехугольник и т. д.), которые согласно приведенным выше формулам автора разрешаются без больших затруднений, не приводя совершенно условий фигур. На этом основании мы полагаем, что принцип уравнивания только за одни условные уравнения целиком может быть развит и на площадные тригонометрические сети любой сложности.

В том случае, когда имеется несколько замкнутых, примыкающих друг к другу полигонов, совместное их уравнивание, очевидно, даст лучшие результаты, так как частное уравнивание, вначале одного, допустим, центрального полигона может отрицательно сказаться на свободных членах условных уравнений в соседних полигонах.

Очевидно, что наложение для таких случаев дополнительно, вообще говоря, четырех условий на полигон и совместное их решение с уравнениями основного полигона не может вызвать больших затруднений.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	2
Введение . . . . .	3
1. Обоснование метода; способ первый . . . . .	5
2. Составление полигонных условных уравнений . . . . .	9
3. Решение условных уравнений . . . . .	12
4. Основные формулы уравнивания . . . . .	15
5. Практические указания . . . . .	16
6. Практическое применение способа к обработке рядов . . . . .	23
7. Соображения о минимуме деформации треугольников . . . . .	38
8. Способ второй. Минимум деформации треугольников . . . . .	40
9. Практический пример уравнивания под условием минимума деформации треугольников . . . . .	44
10. Выводы . . . . .	52
11. Уравнивание центральной системы . . . . .	54
12. Уравнивание наблюдаемых углов треугольников без наложения условий фигур . . . . .	63
13. Практический пример уравнивания наблюденных углов центральной системы . . . . .	68
14. Решение геодезического четырехугольника . . . . .	69
15. Вставка треугольников между двумя сторонами . . . . .	74
16. Уравнивание дополнительного пункта . . . . .	74
17. Уравнивание наблюденных углов триангуляции за полигонные условия . . . . .	76

---

Иркутск, тип. КрайГИЭ. Заказ № 1583. Уполномоченный Крайлита при Огизе № 662. ГИЭ 208. Тираж 3150. Сдано в набор 10 апреля. Подписано к печати 22 мая. Печатных знаков в 1 печатном листе—52800. Формат бумаги 62×88<sup>1/16</sup>. Бумажных листов 3.

Редактор В. Я. Гудэль.

Техредактор А. Островский.